

Premier contrôle continu, théorie des corps, 2023

Durée : 2 heures

Exercice 1. Donner un exemple d'une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 4 et expliquer pourquoi elle est de degré 4.

Exercice 2. Si $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $\text{ppcm}(k, n) = m$, montrer que $\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{k}}, e^{\frac{2i\pi}{n}}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{m}})$.

Exercice 3. Posons $K := \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$, où la réunion se fait dans $\mathbb{C}$. Montrer que K est un corps, que $[K : \mathbb{Q}]$ est infini, et que tout élément de K est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Donner un exemple d'un nombre rationnel r tel que $[\mathbb{Q}(\sqrt{r + \sqrt{5}}) : \mathbb{Q}] = 2$.

Exercice 5. Soit K un corps fini à p^n éléments, avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que m divise n .

- (a) Montrer que K a un sous-corps à p^m éléments.
- (b) Montrer que K a un seul sous-corps à p^m éléments.