

Premier contrôle continu, théorie des corps, mars 2024

Durée : 3 heures

Exercice 1 Calculez les degrés d'extensions suivants, en justifiant :

- (a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$,
- (b) $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$,
- (c) $[\mathbb{Q}(\sqrt[13]{5}, \sqrt[5]{13}) : \mathbb{Q}]$.

Exercice 2. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, montrer qu'ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ distincts et $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\prod_{i=1}^n (X - z_i)^{m_i} \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\prod_{i=1}^n (X - z_i) \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3. (a) Si K est un corps de caractéristique différente de 2, montrer que toute extension quadratique (i.e. de dimension 2) de K est de la forme $K(\sqrt{x})$ avec $x \in K$.

(b) Soit K un corps fini de caractéristique 2. Montrer que $x \mapsto x^2$ est une bijection de K dans K . En déduire qu'il n'existe pas d'extension quadratique de K de la forme $E = K(\sqrt{x})$ avec $x \in K$.

(c) Donner un exemple de corps K de caractéristique 2 qui a une extension quadratique E telle que $E = K(\sqrt{x})$ avec $x \in K$.

Exercice 4. Soit E le corps de décomposition de $X^4 - 2$ dans $\mathbb{C}$. Quelle est la dimension de E sur $\mathbb{Q}$? (justifier)

Exercice 5. Soit E/K une extension. Montrer que $E(t)/K(t)$ est algébrique si et seulement si E/K est algébrique.