

Premier contrôle continu, théorie des corps, mars 2025

Durée : 3 heures

Exercice 1. Soit E/K une extension finie. Soient A, B des extensions de K dans E . On note $\mathcal{X}(A, B)$ la partie de E formée des sommes de la forme $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ avec $a_i \in A$ et $b_i \in B$. On admet que $\mathcal{X}(A, B)$ est un anneau parce que la vérification est facile.

(a) Montrer que $\mathcal{X}(A, B)$ est le sous-anneau de E engendré par $A \cup B$.

(b) En utilisant que tout élément d'une extension finie est algébrique, montrer que $\mathcal{X}(A, B)$ est un corps.

À partir d'ici on note ce corps AB .

(c) Montrer que $[AB : B] \leq [A : K]$.

(d) On dit que A et B sont *linéairement disjointes* si

$$[AB : K] = [A : K][B : K].$$

Montrer que A et B sont linéairement disjointes si et seulement si toute base de A sur K est une base de AB sur B .

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{n}}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))$.

(b) Quel est le degré du polynôme minimal de $\cos(\frac{2\pi}{n})$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 3. Montrer que les corps de décomposition de $X^4 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ et $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$ sont égaux.

Exercice 4. Dans ce qui suit, si on écrit $\sqrt[n]{x}$ cela désigne un élément α tel que $\alpha^n = x$ (c'est à dire *une* racine n -ième de x).

(a) Montrer que toute extension de degré 2 de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{x})$ avec $x \in \mathbb{Q}$.

(b) Soit D le corps de décomposition de $P(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$.

On rappelle les formules $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

(b1) Trouver trois racines distinctes de P , sous la forme $2\cos(\frac{2k\pi}{9})$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(b2) Montrer que $[E : \mathbb{Q}] = 3$.

(b3) Quel est le nombre des $\mathbb{Q}$ -automorphismes de D ? (justifier).

(b4) Montrer que D n'est pas de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{x})$, avec $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 5. (a) Soit K un corps fini et soit $P \in K[X]$ irréductible de degré n . Si E est une extension finie de K , montrer que P est scindé sur E si et seulement si n divise $[E : K]$.

(b) Soit E/K une extension de corps finis. Soit $P \in K[X]$ irréductible. Montrer que tous les polynômes irréductibles de $E[X]$ qui divisent P ont le même degré.