

Corps et théorie de Galois (HAX801X)

Contrôle continu n°1. Durée : 1h30.

Toute affirmation doit être justifiée. La clarté et la précision de la rédaction auront une place importante dans la notation. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

Donnez, en fournissant des justifications *complètes* :

1. la définition d'une extension algébrique de corps ;
2. un polynôme de degré $n > 1$ dont le corps de rupture n'est pas égal au corps de décomposition ;
3. un polynôme de degré $n > 1$ dont le corps de rupture est égal au corps de décomposition ;
4. une démonstration du fait que le cardinal d'un corps fini est une puissance d'un nombre premier.

Exercice 2 : Divisibilité pour le degré du corps de décomposition (7 points)

Démontrez par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ la propriété : « Si L est le corps de décomposition d'un polynôme P de degré n à coefficients dans un corps K , l'entier $[L : K]$ divise $n!$ ».

Dans la récurrence, on pourra traiter d'abord le cas P irréductible, puis le cas P réductible.

Exercice 3 : Un corps de décomposition de degré 3 (11 points)

On considère les nombres complexes $\zeta = e^{2i\pi/7}$, $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$, $\beta = \zeta^2 + \zeta^{-2}$, $\gamma = \zeta^3 + \zeta^{-3}$ et le polynôme $\Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

1. Démontrez que Φ_7 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\Phi_7(X + 1)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Démontrez que Φ_7 est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Quelles sont ses racines complexes ?
3. Démontrez qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\Phi_7(X) = X^3 P(X + \frac{1}{X})$.
4. Démontrez que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Quelles sont ses racines complexes ?
5. Démontrez que β et γ appartiennent à $\mathbb{Q}(\alpha)$.
6. Dites quel est le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$ et donnez son degré.