# Deuxième contrôle continu, théorie de Galois, 2022

Ici (exercice 1), extension **inséparable** veut dire qui n'est pas séparable, c'est-à-dire qui contient au moins un élément qui n'est pas séparable.

**Exercice 1.** (a) Donner un exemple d'extension inséparable de degré 5 (Justifier.)
(b) Donner un exemple d'extension inséparable de degré 10 (Justifier.)
(c) Donne un exemple d'extension non normale de degré 5 (Justifier).
(d) Donner un exemple d'extension normale de degré 5 (Justifier).

**Exercice 2.** Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension normale de degré 3, avec $E \subset \mathbb{C}$.
(a) Montrer que $E$ est stable par la conjugaison complexe.
(b) Montrer que $E \subset \mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Vous pouvez utiliser les formules $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
Soit $P(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Soit $E$ le corps de décomposition de $P$ dans $\mathbb{C}$.
(a) Trouver trois racines distinctes de $P$, sous la forme $2\cos(\frac{2k\pi}{9})$.
(b) Montrer que $[E : \mathbb{Q}] = 3$.
(c) Montrer qu'il n'existe pas d'élément $x$ de $\mathbb{Q}$ tel que $E$ puisse s'écrire sous la forme $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{x})$.

**Exercice 4.** Parmi les extensions de $\mathbb{Q}$ suivantes, lesquelles sont galoisiennes (démontrer dans tous les cas) : $\mathbb{Q}(i, j)$, $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

**Exercice 5.** Calculer $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q})$ (autrement dit, trouver un groupe connu auquel il est isomorphe) et justifier.