

Exercice 1. Soit E/K une extension de corps. Montrer qu'il y a équivalence entre

- (i) E/K est algébrique.
- (ii) Tout sous-anneau de E qui contient K est un corps.

Exercice 3. (Corps composé.) Soit E/K une extension. Soient A et B deux extensions de K dans E , on note AB le sous-corps de E engendré par A et B . C'est une extension de K dans E , appelée **le corps composé** des corps A et B .

Soit \mathcal{X} l'ensemble des sommes de produits du type ab avec $a \in A$ et $b \in B$. On admet que \mathcal{X} est un sous-anneau de E et AB est le corps de fractions de \mathcal{X} dans E .

- (a) On suppose que A/K est algébrique. Montrer que \mathcal{X} est un corps et que AB/B est algébrique.
- (b) Montrer que AB/B algébrique n'implique pas A/K algébrique.
- (c) Supposons que toute famille L d'éléments de A libre sur K est libre sur B . Montrer dans ce cas que, si AB/B est algébrique, alors A/K est algébrique.

Exercice 4. Soit K un corps de caractéristique p non nulle. Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . On pose $K^{p^{-\infty}} := \{x \in \bar{K}, \exists k \in \mathbb{N}^*, x^{p^k} \in K\}$.

- (a) Montrer que $K^{p^{-\infty}}$ est un corps.
- (b) Montrer que le corps $K^{p^{-\infty}}$ est parfait.
- (c) Montrer que tout sous-corps de \bar{K} qui est parfait et contient K contient $K^{p^{-\infty}}$.
- (d) Si $K := \mathbb{F}_2(t)$, montrer que $K^{2^{-\infty}} \neq \bar{K}$.