CC2 Algèbre 2, avril 2023

Exercice 1. Soit E/K une extension de corps. Montrer qu'il y a équivalence entre

(i) E/K est algébrique.

(ii) Tout sous-anneau de E qui contient K est un corps.

Exercice 2. Soit E/K une extension. Soient A et B deux extensions de K dans E, on note AB le sous-corps de E engendré par A et B. C'est une extension de K dans E, appelée **le corps composé** des corps A et B.

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des sommes de produits du type ab avec $a \in A$ et $b \in B$. On admet que $\mathcal{X}$ est un sous-anneau de E et AB est le corps de fractions de $\mathcal{X}$ dans E.

(a) On suppose que A/K est algébrique. Montrer que $\mathcal{X}$ est un corps et que AB/B est algébrique.

(b) Montrer que AB/B algébrique n'implique pas A/K algébrique.

(c) Supposons que toute famille L d'éléments de A libre sur K est libre sur B. Montrer dans ce cas que, si AB/B est algébrique, alors A/K est algébrique.

Exercice 3. Soit K un corps de caractéristique p non nulle. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. On pose $K^{p^{-\infty}} := \{x \in \bar{K}, \exists k \in \mathbb{N}^*, x^{p^k} \in K\}$.

(a) Montrer que $K^{p^{-\infty}}$ est un corps.

(b) Montrer que le corps $K^{p^{-\infty}}$ est parfait.

(c) Montrer que tout sous-corps de $\bar{K}$ qui est parfait et contient K contient $K^{p^{-\infty}}$.

(d) Si $K := \mathbb{F}_2(t)$, montrer que $K^{2^{-\infty}} \neq \bar{K}$.