# Deuxième contrôle continu, théorie des corps, avril 2024

Durée : une heure et demie

**Exercice 1** (a) Soit $E/K$ une extension finie. Donner la définition de "$E/K$ est normale". Donner deux conditions équivalentes à "$E/K$ est normale", celles du théorème du cours. Il faut que votre définition et vos conditions équivalentes soient exprimés de façon claire complète et rigoureuse.

(b) Soit $K$ un corps. Donner une définition rigoureuse (et une seule, pas des conditions équivalentes) de "$K$ est algébriquement clos". Puisque plusieurs conditions équivalentes peuvent servir traditionnellement de définition, vous pouvez donner celle de votre choix, mais il faut en donner une seule et qu'elle soit claire, complète, minimaliste et rigoureuse.

(c) Soit $E/K$ une extension. Donner la définition de "$E$ est une clôture algébrique de $K$".

(d) Soit $E/K$ une extension, avec la caractéristique de $K$ égale à un nombre premier $p$. Soit $x \in E$ un élément algébrique sur $K$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^{p^k}$ est séparable sur $K$.

**Exercice 2.** Soient $K$ un corps infini et $E/K$ une extension finie. On suppose que $E$ est engendré sur $K$ par deux éléments $x$ et $y$, c'est-à-dire $E = K(x, y)$, et que $\boxed{y \text{ est séparable}}$.

Soit $P$ le polynôme minimal de $x$ sur $K$. Soit $Q$ le polynôme minimal de $y$ sur $K$. On fixe une extension $\bar{E}$ de $E$ où $P$ et $Q$ sont scindés, et on considère toutes les racines $x = x_1, x_2, ..., x_p$ de $P$ et $y = y_1, y_2, ..., y_q$ de $Q$ dans $\bar{E}$. On pose $A := \{ -\frac{x_i - x}{y_j - y},\ 1 \leq i \leq p,\ 2 \leq j \leq q \}$. C'est un sous-ensemble de $\bar{E}$. Soit $u \in K \backslash A$ ($u$ est dans $K$, mais pas dans $A$). Posons $z := x + uy$. Notons $K'$ le corps $K(z)$. C'est un sous-corps de $\bar{E}$, et le but de cet exercice est de montrer qu'il s'agit de $E$, autrement dit qu'avec ce choix de $u$ on est assuré que $z$ engendre $E$ sur $K$.

On définit le polynôme $\tilde{P}$ par la formule $\tilde{P}(X) = P(z - uX)$.

(a) Montrer que $\tilde{P}$ et $Q$ ont seulement $y$ comme racine commune dans $\bar{E}$.

(b) Montrer que le pgcd de $\tilde{P}$ et $Q$ dans $K'[X]$ est $X - y$ ($K' := K(z)$).

(c) En déduire que $K' = E$.

(d) Donner un exemple avec $K = \mathbb{Q}$, où $E/\mathbb{Q}$ est finie, $E = K(x, y)$, et ni $x$, ni $y$, ni $x + y$ n'engendre à lui tout seul $E$ sur $K$.