Deuxième contrôle continu, théorie des corps, avril 2025

Durée : 3 heures

Exercice 1. Soit E/K une extension algébrique (pas forcément finie). On suppose que E peut s'écrire comme une réunion $\cup_{i \in I} L_i$, réunion pas forcément finie, où L_i sont des extensions de K dans E, telles que L_i/K est normale pour tout K. Montrer que E/K est normale.

Exercice 2. Soit E/K une extension algébrique. Montrer que tout K-endomorphisme de E est un automorphisme.

Exercice 3. Soit E/K une extension algébrique normale. Soit L une extension de K dans E. On suppose que pour tout K-automorphisme f de E on a $f(L) = L$. Montrer que L/K est normale.

Exercice 4. Montrer soigneusement que $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ est normale, et $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})/\mathbb{Q}$ n'est pas normale.

Exercice 5. Soit E/K une extension finie. Soit $\bar{E}$ une clôture algébrique de E. Soient $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ les K-plongements de E dans $\bar{E}$. On suppose que σ_1 est celui qui est l'identité sur tout élément de E.

On suppose que tous les éléments de E sont séparables sur K, c'est-à-dire que leur polynôme minimal a des racines simples dans $\bar{E}$.

On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que : pour tout i si $\sigma_i(x) = x$, alors $i = 1$. Montrer qu'on a $E = K(x)$.

Remarque. Un tel x existe. La preuve est facile à comprendre (une fois que quelqu'un a eu l'idée de la donner). Si K est infini, alors tout espace de dimension finie sur K ne peut pas être réunion de sous-espaces de dimension strictement inférieure (exercice d'algèbre linéaire). Si $1 \leq i \leq m$, on pose $V_i := \{x \in E, \sigma_i(x) = x\}$, et alors la réunion des V_i ne peut pas être égale à E. Or, tout x qui n'appartient pas à la réunion vérifie ce qu'on cherche. Si K est fini, cela se montre par une autre méthode, par exemple en prenant x égal à un générateur de $E^\times$. Mais si K est fini, alors cette méthode montre depuis le début que l'extension est monogène, donc l'exercice n'a plus d'intérêt.