

# Corps et théorie de Galois (HAX801X)

Contrôle continu n°2. Durée : 1h30.

Toute affirmation doit être justifiée, sauf mention explicite du contraire. La clarté et la précision de la rédaction auront une place importante dans la notation. Le barème est donné à titre indicatif.

**Le sujet est volontairement un peu long mais il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale : privilégiez les questions qui vous inspirent le plus.**

## Exercice 1 : Questions de cours (6 points)

1. Donnez la définition d'un élément séparable dans une extension de corps.
2. Donnez sans démonstration un exemple d'une extension de corps qui n'est pas normale :
  - (a) en caractéristique 0,
  - (b) en caractéristique différente de 0.
3. Énoncez le théorème de correspondance de Galois pour une extension finie galoisienne.

## Exercice 2 : Sous-corps de $\mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$ (6 points)

1. Montrez que  $E = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$  est une extension galoisienne de degré 4 de  $\mathbb{Q}$ .
2. Montrez que le groupe de Galois  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ .
3. Donnez la liste des sous-groupes de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ .
4. Donnez la liste des sous-extensions de  $E/\mathbb{Q}$ .

## Exercice 3 : Réalisations de $\mathbb{F}_{16}$ (6 points)

Soit  $\mathbb{F}_2$  le corps à deux éléments. On considère les polynômes  $P(X) = X^4 + X + 1$  et  $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  et on note  $K = \mathbb{F}_2[X]/(P)$  et  $L = \mathbb{F}_2[X]/(Q)$ .

1. Prouvez que  $P$  et  $Q$  sont irréductibles sur  $\mathbb{F}_2$ .
2. Montrez que  $K$  et  $L$  sont des corps finis dont vous préciserez le cardinal. Sont-ils isomorphes ?
3. Soient  $\alpha$  l'image de  $X$  dans  $K$ , et  $\beta$  l'image de  $X$  dans  $L$ . Montrez que  $\alpha$  engendre le groupe cyclique  $K^*$ , mais que  $\beta$  n'engendre pas le groupe cyclique  $L^*$ .
4. Montrez que  $\gamma := \beta + 1$  engendre le groupe cyclique  $L^*$ .
5. Donnez un isomorphisme explicite  $K \simeq L$ .

## Exercice 4 : Permanence de l'irréductibilité après extension radicielle (6 points)

Soit  $L/K$  une extension de corps de caractéristique  $p > 0$  qui est finie et radicielle. On note  $P \in K[X]$  un polynôme irréductible et séparable. On souhaite montrer que  $P$  reste irréductible dans  $L[X]$ .

On note  $x$  une racine de  $P$  dans une clôture algébrique de  $L$ .

1. Démontrez que le degré séparable  $[L : K]_s$  vaut 1.
2. Démontrez que  $L(x)/K(x)$  est radicielle.
3. Démontrez que  $L(x)/L$  est séparable.
4. En considérant le diagramme d'extensions ci-contre, déduisez-en que  $[L(x) : L] = [K(x) : K]$ .
5. Concluez que  $P$  est irréductible dans  $L[X]$ .

