Examen final Algèbre 2, mai 2023

On peut utiliser le résultat énoncé dans une question A pour résoudre une question X qui vient après A dans l'examen, même si on n'a pas démontré A. Pour le reste, il faut utiliser des résultats du cours (si vous voulez utiliser un exercice vu en TD, il faut le formuler comme résultat et le prouver). On rappelle les deux résultats suivants :

Théorème du plongement des extensions monogènes. Soient $K(x)/K$ une extension monogène et E/K est une extension. Soit P le polynôme minimal de x sur K. Tout K-morphisme de $K(x)$ dans E transforme x en une racine de P, et il y a autant de K-morphismes de $K(x)$ dans E que des racines de P dans E.

Théorème du prolongement. Si E/K est une extension algébrique et C est un corps algébriquement clos, tout morphisme de K dans C se prolonge à un morphisme de E dans C.

Exercice 1. Donner exemple d'une extension $E/\mathbb{Q}$ de degré 6 et démontrer qu'elle est de degré 6.

Exercice 2. Montrer que le produit des éléments non nuls d'un corps fini est égal à -1.

Exercice 3. Donner un exemple de deux extensions E/K et E'/E, finies, telles que E/K et E'/E sont normales et E'/K n'est pas normale, et démontrer cela.

Exercice 4. Soit $\mathbb{F}$ un corps fini à q éléments, avec q impair. Montrer que le nombre d'éléments de $\mathbb{F}$ qui sont des carrés (c'est-à-dire qui sont de la forme x^2 avec $x \in \mathbb{F}$) est égal à $\frac{q+1}{2}$.

Exercice 5. Soit K un corps de caractéristique non nulle p. Montrer que le polynôme $X^p - 2$ a zéro ou une racine dans K, jamais plus.

Exercice 6. Soient K un corps et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Soit P un polynôme irréductible à coefficients dans K. Soient x et y deux racines de P dans $\bar{K}$. Montrer qu'il existe un K-isomorphisme $\iota : \bar{K} \to \bar{K}$ tel que $\iota(x) = y$.

Exercice 7. Soit K un corps infini. Soit E/K une extension finie séparable de degré n. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des K-morphisme de corps de E dans $\bar{K}$.

(a) Si E/K est monogène, montrer que le cardinal de $\mathcal{P}$ est n.

(b) Montrer par récurrence sur n que le cardinal de $\mathcal{P}$ est n dans tous les cas.

(c) Notons $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ les éléments de $\mathcal{P}$. Pour tout $i \neq j$ dans $\{1, 2, ..., n\}$, posons $V_{i,j} := \{x \in E, \sigma_i(x) = \sigma_j(x)\}$. Montrer que $V_{i,j}$ est un K-sous-espace vectoriel propre de E (propre veut dire qu'il n'est pas égal à E).

(d) Dans cette question on admet le résultat d'algèbre linéaire qui dit qu'une réunion finie de sous-espaces propres d'un espace vectoriel V sur un corps infini n'est jamais égale à V tout entier. Ainsi, la réunion des $V_{i,j}$ n'est pas E, et on peut choisir x dans E, mais qui n'appartient à aucun $V_{i,j}$. Démontrer que dans ce cas on a $K(x) = E$.