

Examen final première session, Algèbre 2, M1, mai 2024

Durée : 3 heures

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre de votre choix. N'hésitez pas à choisir les questions qui vous plaisent plus ou qui vous semblent nécessiter moins de temps à traiter d'abord. Écrivez seulement clairement quelle question vous traitez (3(c) par exemple).

Vous pouvez utiliser le résultat non prouvé d'une question pour résoudre une question qui la suit.

Exercice 1. Soit F un corps fini de cardinal n , avec n impair.

- (a) Montrer que la caractéristique de F est différente de 2.
- (b) Montrer que la somme de tous les éléments de F est nulle.
- (c) Combien d'éléments de F sont des carrés (justifier).

Exercice 2. (a) Trouver le polynôme minimal P de $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ sur \mathbb{Q} et ses autres racines.

- (b) Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{3}}) : \mathbb{Q}]$ et justifier.
- (c) Soit E le corps de décomposition de P . Montrer que $E = \mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{3}}, i\sqrt{2})$.
- (d) Calculer $[E : \mathbb{Q}]$.
- (e) À quel groupe connu est isomorphe le groupe de Galois de E sur \mathbb{Q} (justifier).

Exercice 3. Soit E un corps. Soit G un sous-groupe fini d'ordre n du groupe des automorphismes de E . On note $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ les éléments de G .

Posons

$$K := \{x \in E, \sigma(x) = x \forall \sigma \in G\}.$$

On rappelle que K est un sous-corps de E .

Fixons $x \in E$. Soit k le cardinal de l'ensemble $\{\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x)\}$. Quitte à renuméroter les éléments σ_j de G , nous supposons que $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_k(x)$ sont distincts, et sont donc toutes les valeurs que prend $\sigma(x)$ quand σ parcourt G .

Posons

$$P_x(X) := \prod_{j=1}^k (X - \sigma_j(x)).$$

- (a) Montrer que P_x a des coefficients dans K .
- (b) Montrer que P_x est irréductible – autrement dit P_x est le polynôme minimal de x .
- (c) En déduire que
 - l'extension E/K est séparable,
 - l'extension E/K est normale,
 - pour tout $x \in E$, on a $[K(x) : K] \leq n$.
- (d) Montrer que $[E : K] \leq n$ (utiliser la dernière affirmation de (c)).
- (e) Montrer que G est le groupe de Galois de E/K .