Corps et théorie de Galois (HAX801X)

Contrôle terminal. Durée : 3h.

Toute affirmation doit être justifiée.
La clarté et la précision de la rédaction auront une place importante dans la notation.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)
Soit K un corps. Donnez la définition des concepts suivants :

1. un corps de rupture d'un polynôme $P \in K[X]$,
2. un corps de décomposition d'un polynôme $P \in K[X]$,
3. une clôture algébrique de K.

Soient $E/L/K$ des extensions de corps, et $x \in E$. Démontrez que :

4. si x est séparable sur K, il l'est sur L,
5. si x est radiciel sur K, il l'est sur L.

Exercice 2 : Un multiple irréductible défini sur le corps de base (2 points)
Démontrer que si E/K est une extension finie et $P \in E[X]$ est irréductible sur E, il existe $Q \in K[X]$ irréductible sur K tel que P divise Q dans $E[X]$.

Exercice 3 : Un polynôme irréductible (4 points)
On considère les deux nombres complexes $\alpha = \sqrt{2}$ et $\beta = \sqrt[3]{5}$, et on pose $\gamma = \alpha + \beta$.

1. Calculez les degrés de α et β sur $\mathbb{Q}$.
2. Trouvez un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 6 tel que $P(\gamma) = 0$.
3. Démontrez que $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$.
4. Déduisez-en que P est irréductible.

Exercice 4 : Racines n-ièmes de l'unité dans $\overline{K}$ (3 points)
Soit K un corps et $p = \max(1, \mathrm{car}(K))$ son exposant caractéristique. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans une clôture algébrique de K.

1. Démontrez qu'il existe des entiers $s \geqslant 0$ et $m \geqslant 1$ tels que $n = p^s m$ et $\mathrm{pgcd}(p, m) = 1$.
2. Ces entiers sont-ils uniques ?
3. Démontrez que $\mathrm{card}(\mu_n) = m$ et donnez la structure du groupe μ_n.

Exercice 5 : Une extension galoisienne (5 points)

Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à 2 éléments.

1. Démontrez que l'anneau $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$ est un corps à 4 éléments. Démontrez que la classe de X modulo X^2+X+1, notée j, est une racine primitive troisième de l'unité.

Soient $E = \mathbb{F}_4(t)$ le corps de fractions rationnelles en une indéterminée t et $\sigma, \tau : E \to E$ les automorphismes définis par :

$$\begin{cases} \sigma(a) = a^2 & \text{si } a \in \mathbb{F}_4 \\ \sigma(t) = t \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau(a) = a & \text{si } a \in \mathbb{F}_4 \\ \tau(t) = jt. \end{cases}$$

2. Les automorphismes σ et τ commutent-ils ?
3. À quel groupe fini connu le groupe G engendré par σ et τ dans $\mathrm{Aut}(E)$ est-il isomorphe ?
4. Démontrez que le corps de points fixes $K = E^G$ est égal à $\mathbb{F}_2(t^3)$.
5. Combien l'extension E/K possède-t-elle de sous-extensions ?

Exercice 6 : Décomposition de Jordan-Chevalley (6 points)

Soient $\mathrm{M}_n(K)$ la K-algèbre des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans K, et $A \in \mathrm{M}_n(K)$. On rappelle l'énoncé du théorème de décomposition de Jordan-Chevalley (1) :

> *Si le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur K, il existe un unique couple de matrices $(S, N) \in \mathrm{M}_n(K)^2$ telles que $A = S+N$; S est diagonalisable ; N est nilpotente ; et $SN = NS$.*

Dans cet exercice on suppose que K est *parfait* et on se propose de démontrer que, sans aucune hypothèse sur χ_A il existe une décomposition de Jordan-Chevalley $A = S + N$ avec pour seule modification que l'on demande que S soit diagonalisable sur une clôture algébrique de K.

1. On note E/K le corps de décomposition de χ_A. Démontrez que l'extension E/K est galoisienne.
2. Soit σ un élément du groupe $G = \mathrm{Gal}(E/K)$. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})$ dans $\mathrm{M}_n(E)$, on note $\sigma(M)$ la matrice de coefficients $\sigma(m_{i,j})$. Démontrez que l'application $\mathrm{M}_n(E) \to \mathrm{M}_n(E)$ qui à M associe $\sigma(M)$ est un automorphisme de K-algèbres.
3. Comme χ_A est scindé sur E, le théorème de Jordan-Chevalley fournit une écriture unique $A = S + N$ avec $S, N \in \mathrm{M}_n(E)$. Démontrez que pour tout $\sigma \in G$ on a $\sigma(S) = S$ et $\sigma(N) = N$.
4. Déduisez-en que $S \in \mathrm{M}_n(K)$ et $N \in \mathrm{M}_n(K)$.
5. On considère la matric de rotation $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez son polynôme caractéristique et sa décomposition de Jordan-Chevalley $A = S + N$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(1). Appelée le plus souvent *décomposition de Dunford* dans l'enseignement français.