

Exercices de théorie de Galois : Corrigé d'une question de l'exercice 18

Exercice 18. (Degré de sommes de nombres algébriques)

Dans chaque cas, trouver le degré sur $\mathbb{Q}$ de α , de β et de $\alpha + \beta$.

1. $\alpha = \sqrt{2}$ et $\beta = \sqrt[3]{5}$.
2. $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$. (Indication : on pourra calculer $(\alpha + \beta)^3$.)

Corrigé.

1. Nous nous limitons à calculer le degré de $\alpha + \beta$. Posons $\gamma := \alpha + \beta$. On peut commencer en essayant de trouver un polynôme annulateur pour γ , en espérant qu'on saura montrer qu'il est irréductible. En tenant compte du fait que $\alpha^2 = 2$, on calcule :

$$5 = \beta^3 = (\gamma - \alpha)^3 = \gamma^3 - 3\alpha\gamma^2 + 6\gamma - 2\alpha.$$

On en déduit que $(\star) \gamma^3 + 6\gamma - 5 = 3\alpha\gamma^2 + 2\alpha = (3\gamma^2 + 2)\alpha$ puis

$$(\gamma^3 + 6\gamma - 5)^2 = 2(3\gamma^2 + 2)^2.$$

Ceci fournit un polynôme de degré 6 annulateur de γ . Mais montrer qu'il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ semble une tâche effrayante... Procédons différemment : si on démontre que $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$, en utilisant le résultat de l'exercice 15, comme $\deg(\alpha) = 2$ et $\deg(\beta) = 3$ sont premiers entre eux, on obtiendra $\deg(\gamma) = 6$. Et en effet cette stratégie fonctionne, car l'égalité $(\star)$ ci-dessus donne :

$$\alpha = \frac{\gamma^3 + 6\gamma - 5}{3\gamma^2 + 2} \in \mathbb{Q}(\gamma)$$

donc aussi $\beta = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}(\gamma)$. Ainsi l'inclusion $\mathbb{Q}(\gamma) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ est une égalité. Ouf !

2. Nous nous limitons à calculer le degré de α et le degré de β . Comme $\alpha^3 = 2 + \sqrt{3}$ et $\beta^3 = 2 - \sqrt{3}$, on a $(\alpha^3 - 2)^2 = (\beta^3 - 2)^2 = 3$. Ceci signifie que α et β sont tous deux racines du polynôme

$$P(X) = (X^3 - 2)^2 - 3 = (X^3 - 2 - \sqrt{3})(X^3 - 2 + \sqrt{3}) = X^6 - 4X^3 + 1.$$

Nous allons montrer que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$, et ce sera donc le polynôme minimal de α et β qui seront alors de degré 6.

Notons $j = \exp(2i\pi/3)$ la racine primitive troisième de l'unité. En partant de $P(X) = (X^3 - 2 - \sqrt{3})(X^3 - 2 + \sqrt{3})$, on peut le factoriser :

$$P(X) = (X - \alpha)(X - j\alpha)(X - j^2\alpha)(X - \beta)(X - j\beta)(X - j^2\beta).$$

Nous allons voir qu'aucun sous-produit strict de ces 6 facteurs n'est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Une manière de le faire est de réunir les facteurs complexes conjugués pour obtenir la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2)(X - \beta)(X^2 + \beta X + \beta^2).$$

Considérons une factorisation $P = QR$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Comme $\deg(P) = 6$, l'un des deux facteurs est de degré ≤ 3 , disons par exemple que $\deg(Q) \leq 3$.

1. L'éventualité $\deg(Q) = 1$ est impossible car ni $(X - \alpha)$ ni $(X - \beta)$ n'est à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
2. L'éventualité $\deg(Q) = 2$ est impossible car :
 - (a) $(X^2 + \alpha X + \alpha^2) \notin \mathbb{Q}[X]$,
 - (b) $(X^2 + \beta X + \beta^2) \notin \mathbb{Q}[X]$,
 - (c) $(X - \alpha)(X - \beta) \notin \mathbb{Q}[X]$. Démontrer ceci est plus difficile. On note que le coefficient constant est $\alpha\beta = 1$. Il faut donc montrer que $\gamma := \alpha + \beta \notin \mathbb{Q}$. Or on peut facilement trouver un polynôme annulateur pour γ , car $\alpha^3 + \beta^3 = 4$ (par définition de α et β) donc

$$\gamma^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 4 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 + 3\gamma.$$

Ainsi γ est racine de $P(X) = X^3 - 3X - 4$. Le critère d'existence d'une racine rationnelle $x = p/q$ fournit $p \mid 4$ et $q \mid 1$, donc $q = 1$ et $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Aucun des nombres $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ n'est racine, ce qui montre bien que $\alpha + \beta \notin \mathbb{Q}$.

3. L'éventualité $\deg(Q) = 3$ est impossible car :
 - (a) $(X - \alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2) \notin \mathbb{Q}[X]$ puisque son coefficient constant est $-2 - \sqrt{3}$,
 - (b) $(X - \alpha)(X^2 + \beta X + \beta^2) \notin \mathbb{Q}[X]$ puisque son coefficient constant est $-\beta$,
 et de même les symétriques en échangeant α et β ne sont pas à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

La seule possibilité restante est $\deg(Q) = 0$, donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.