

Contrôle 1

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 (2 points) Soient A un anneau et I, J des idéaux bilatères de A tels que $I \subset J$. On note J/I l'idéal image de J dans l'anneau quotient A/I . Montrez que les anneaux $(A/I)/(J/I)$ et A/J sont isomorphes.

Exercice 2 (5 points) Soient k un corps, $M_2(k)$ la k -algèbre des matrices de taille $(2, 2)$ à coefficients dans k , et A la sous- k -algèbre engendrée par les matrices $M = E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Donnez une base de A comme k -espace vectoriel.
- (2) A est-il commutatif ? Est-ce une algèbre à division ? Est-ce un anneau simple ?

Exercice 3 (3 points) Soient A un anneau, $u \in A$ un élément inversible et $n \in A$ un élément nilpotent. Montrez que si A est commutatif alors $u+n$ est inversible (commencez par considérer le cas $u = 1$). Est-ce encore vrai si A n'est pas commutatif ?

Contrôle 1

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 (2 points) Soient A un anneau et I, J des idéaux bilatères de A tels que $I \subset J$. On note J/I l'idéal image de J dans l'anneau quotient A/I . Montrez que les anneaux $(A/I)/(J/I)$ et A/J sont isomorphes.

Exercice 2 (5 points) Soient k un corps, $M_2(k)$ la k -algèbre des matrices de taille $(2, 2)$ à coefficients dans k , et A la sous- k -algèbre engendrée par les matrices $M = E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Donnez une base de A comme k -espace vectoriel.
- (2) A est-il commutatif ? Est-ce une algèbre à division ? Est-ce un anneau simple ?

Exercice 3 (3 points) Soient A un anneau, $u \in A$ un élément inversible et $n \in A$ un élément nilpotent. Montrez que si A est commutatif alors $u+n$ est inversible (commencez par considérer le cas $u = 1$). Est-ce encore vrai si A n'est pas commutatif ?