

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 - Anneaux finis

- (1) Donnez un exemple d'anneau fini non commutatif.
- (2) Soient A un anneau fini et $x \in A$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : x est inversible à gauche ; régulier à gauche ; inversible à droite ; régulier à droite.
- (3) Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps.

Exercice 2 - L'anneau $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Quels sont les éléments inversibles et réguliers de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 3 - Un calcul d'inverse

- (1) Rappeler quel est l'inverse de $1 - T$ dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}[[T]]$.
- (2) Soit A un anneau et $a, b \in A$. Montrez que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ l'est également.

Exercice 4 - Morphisme de Frobenius

Soient p un nombre premier et A un anneau commutatif tel que $p \cdot 1_A = 0$.

- (1) Montrez que $px = 0$ pour tout $x \in A$.
- (2) Montrez que dans A , les coefficients binomiaux $\binom{p}{i}$ sont nuls pour $0 < i < p$.
- (3) Montrez que l'application $F : A \longrightarrow A, x \longmapsto x^p$ est un endomorphisme d'anneaux. Que vaut-il dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 5 - Idempotents et produits

Un élément e d'un anneau commutatif A est dit *idempotent* si $e^2 = e$.

- (1) Soit A un anneau intègre. Quels sont les idempotents de A ?
- (2) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux. Quels sont les idempotents de $\prod_{i \in I} A_i$? Et si tous les A_i sont intègres ?
- (3) Quels sont les idempotents de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? De $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- (4) Montrez que si e est idempotent, alors $(1 - e)$ est idempotent. Montrez que l'idéal $(e) = eA$ est un anneau unitaire d'élément unité e , puis que l'application

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow eA \times (1 - e)A \\ x &\longmapsto (ex, (1 - e)x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Quel est son inverse ?

Exercice 6 - Algèbre des quaternions de Hamilton

Soit k un corps. On appelle k -algèbre un anneau A muni d'une structure de k -espace vectoriel telle que la multiplication $m : A \times A \rightarrow A$ est k -bilinéaire. L'algèbre des matrices $M_n(k)$, ou si $k = \mathbb{R}$ l'anneau de fonctions $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sont des exemples. On appelle *morphisme de k -algèbres* un morphisme d'anneaux qui est k -linéaire.

(1) Pour tout $a \in A$, notons $\gamma_a : A \rightarrow A$, $x \mapsto ax$ la multiplication à gauche par a . Montrez que γ_a est un endomorphisme k -linéaire et que l'application $\gamma : A \rightarrow \text{End}_k(A)$, $a \mapsto \gamma_a$ est un morphisme injectif de k -algèbres. (On désigne par $\text{End}_k(A)$ l'algèbre des endomorphismes du k -espace vectoriel A .)

On définit l'*algèbre des quaternions* $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ comme étant le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ avec pour multiplication l'application $\mathbb{R}$ -bilinéaire pour laquelle 1 est élément neutre définie par :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ; \quad ij = -ji = k \quad ; \quad ik = -ki = -j \quad ; \quad jk = -kj = i.$$

On admet que cette multiplication munit $\mathbb{H}$ d'une structure de $\mathbb{R}$ -algèbre associative.

(2) Donnez les images de i et j par l'application $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Déduisez-en une autre manière de définir $\mathbb{H}$, dans laquelle l'associativité de la multiplication est « évidente ». Quelles sont les caractéristiques de $\mathbb{H}$ qui ne sont pas évidentes, dans cette présentation ?

(3) Pour tout quaternion $q = a + bi + cj + dk$, on pose $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ que l'on appelle le *conjugué* de q . Montrez que la conjugaison est un anti-automorphisme involutif de $\mathbb{R}$ -algèbres. Montrez que $q \in \mathbb{R}$ ssi $\bar{q} = q$.

On note $\mathbb{R}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ engendré par 1 ; on appelle *quaternions réels* ses éléments. On note P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ engendré par i, j, k ; on appelle *quaternions imaginaires purs* ses éléments.

(4) Montrez que le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$.

(5) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : q est réel ; $\bar{q} = q$; $q^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. (L'ordre de $\mathbb{R}$ ne s'étend pas à $\mathbb{H}$ et il est donc plus prudent de noter $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que $q \geq 0$.)

(6) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : q est imaginaire pur ; $\bar{q} = -q$; $q^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$.

(7) On définit la *norme* d'un quaternion q par $N(q) = q\bar{q}$. Vérifiez que $N(q) \in \mathbb{R}$, $N(\bar{q}) = N(q)$, et $N(q) = 0$ si et seulement si $q = 0$. Montrez que $\mathbb{H}$ est une algèbre à division.

(8) Résolvez dans $\mathbb{H}$ l'équation $x^2 = -1$. Qu'en déduisez-vous pour la factorisation des polynômes à coefficients dans $\mathbb{H}$?

(9) Existe-t-il sur $\mathbb{H}$ une (ou des) structure(s) de $\mathbb{C}$ -algèbre ?

Exercice 7 - Unités et éléments nilpotents d'un anneau de polynômes

Soit A est un anneau commutatif.

(1) Montrer que, pour $a \in A^*$ et $n \in \text{Nil}(A)$, $a + n \in A^*$.

(2) Montrer que $\text{Nil}(A[X]) = \text{Nil}(A)[X]$.

(3) Montre que $A[X]^* = A^* + X\text{Nil}(A)[X]$.

Exercice 8 - Caractérisation de l'intégrité

Soit A un anneau commutatif distinct de $\{0\}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$. Montrer que s'équivalent :

- (1) A est intègre ;
- (2) tout polynôme unitaire de degré n a au plus n racines ;
- (3) tout polynôme unitaire de degré 2 a au plus 2 racines ;

Étudier les cas $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$.

Exercice 9 - Anneaux tels que $a^3 = a$

Soit A un anneau tel que $a^3 = a$, pour tout $a \in A$. On se propose d'établir que A est commutatif.

- (1) Montrer que $6A = \{0\}$.
- (2) Montrer que $2A$ et $3A$ sont des idéaux bilatères de A vérifiant $2A+3A = A$ et $2A \cap 3A = \{0\}$. En déduire qu'on peut supposer soit $2A = \{0\}$, soit $3A = \{0\}$.
- (3) Si $2A = \{0\}$, montrer que $a^2 = a$, pour tout $a \in A$, et conclure.
- (4) Si $3A = \{0\}$, conclure en s'intéressant à $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

Exercice 10 - Image d'un idéal

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

- (1) L'image directe d'un idéal de A est-elle un idéal de B ? Et si f est supposé surjectif ?
- (2) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier de B est un idéal premier de A .
- (3) Montrer que l'image réciproque d'un idéal maximal de B est un idéal maximal de A , lorsque f est supposé surjectif. Donner un contre-exemple lorsque f n'est pas surjectif.
- (4) En déduire que, pour un idéal I de A , $\pi : A \longrightarrow A/I$ induit une bijection entre les idéaux (resp. premiers, resp. maximaux) de A qui contiennent I et les idéaux (resp. premiers, resp. maximaux) de A/I .

Exercice 11 - Radical de Jacobson

Soit A un anneau commutatif. On appelle *radical de Jacobson* de A , noté $\text{Rad}(A)$, l'intersection des idéaux maximaux de A .

- (1) Montrer que $\text{Rad}(A) = \{a \in A / \forall b \in A, 1 - ab \in A^*\}$.
- (2) Montrer que $\text{Rad}(A/\text{Rad}(A)) = \{0\}$.

Exercice 12

Soit A un anneau commutatif.

- (1) Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A et $I_1, \dots, I_n$ des idéaux de A . Montrer que si $\mathfrak{P}$ contient le produit $I_1 \dots I_n$, alors il contient l'un des I_k .
- (2) Montrer que si I est un idéal non premier de A , il existe des idéaux I_1 et I_2 de A distincts de I tels que $I \subset I_1, I \subset I_2$ et $I_1 I_2 \subset I$.