Université Rennes 1, Année 2013-2014, Master 1 Math., Algèbre générale de base

Contrôle 2

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Soit A un anneau commutatif intègre. On appelle *polynôme de Laurent en X à coefficients dans A* un polynôme en X et $1/X$, c'est-à-dire une expression

$$P = \sum_{i=-e}^{d} a_i X^i$$

où $d, e \geq 0$ sont des entiers. On note $B = A[X, 1/X]$ la A-algèbre des polynômes de Laurent.

(1) Montrez que tout élément non nul de B peut s'écrire de manière unique sous la forme $X^n P$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in A[X]$ non divisible par X.

(2) On note $A^\times, B^\times$ les groupes d'éléments inversibles. Montrez que l'application $f : A^\times \times \mathbb{Z} \to B^\times$ définie par $f(a, n) = aX^n$ est un isomorphisme de groupes.

(3) Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. En utilisant deux fois la question (2), décrivez le $\mathbb{Z}$-module M des éléments inversibles de

$$\mathbb{C}[X, Y, 1/X, 1/Y]$$

et son sous-module de torsion $T(M)$.

(4) Montrez que le quotient $L := M/T(M)$ est libre de base $\{X, Y\}$ et calculez les facteurs invariants de l'endomorphisme $f : L \to L$ déterminé par $f(X) = X^5Y$, $f(Y) = X^{-2}Y^3$.