

Corrigé du TD 1

Théorème 1 Soit A un anneau noëthérien, alors l'anneau de polynômes $A[X]$ est noëthérien.

Preuve : Soit $I \subset A[X]$, nous allons montrer qu'il est de type fini. Soit f_1 un polynôme de plus petit degré dans I . Par récurrence, tant que $(f_1, \dots, f_k) \neq I$, on choisit un f_{k+1} de degré minimal dans $I \setminus (f_1, \dots, f_k)$. Ce procédé s'arrête, ou non. Soit $a_k X^{d_k}$ le terme dominant de f_k , alors comme A est noëthérien, l'idéal engendré par tous les a_k peut être engendré par un nombre fini d'entre eux, disons $a_1, \dots, a_m$. Montrons que $I = (f_1, \dots, f_m)$. Si ce n'est pas le cas, notre procédé fournit un f_{m+1} . Or on a $a_{m+1} = u_1 a_1 + \dots + u_m a_m$ pour certains $u_k \in A$. Considérons le polynôme

$$g = (u_1 f_1 X^{d_{m+1}-d_1} + \dots + u_m f_m X^{d_{m+1}-d_m}) - f_{m+1}$$

On voit que $\deg(g) < \deg(f_{m+1})$, et que $g \in I \setminus (f_1, \dots, f_m)$. Ceci contredit le choix de f_{m+1} . $\square$

Corollaire 2 Soit A noëthérien, alors toute A -algèbre de type fini est noëthérienne.

On fait une récurrence sur le nombre d'indéterminées et on utilise le fait (évident) qu'un quotient d'un anneau noëthérien est noëthérien.

Remarque : Dans un anneau A , le radical d'un idéal I est l'idéal noté $\sqrt{I}$ constitué des éléments de A qui ont une puissance dans I . Le radical de I est aussi égal à l'intersection des idéaux premiers⁽¹⁾ qui contiennent I . Ainsi, $V(I) = V(\sqrt{I})$. On en déduit aussi que $V(I) \subset V(J)$ équivaut à $\sqrt{I} \supset \sqrt{J}$, en effet seul le sens direct n'est pas facile, or si $V(I) \subset V(J)$, alors tout premier qui contient I contient J , donc $\cap_{p \supset J} p \subset \cap_{p \supset I} p$ car l'intersection de droite porte que un ensemble de premiers plus grand.

Exercice 3 Supposons X irréductible. Alors si $xy \in \sqrt{0}$, pour tout $p \subset A$ premier, on a $x \in p$ ou $y \in p$. Ainsi $X = V(x) \cup V(y)$. Comme X est irréductible, $V(x) = X$ ou $V(y) = X$. Si $V(x) = X$ par exemple, alors tout premier contient x , donc $x \in \cap p = \sqrt{0}$. Ceci montre que $\sqrt{0}$ est premier, donc $A_{\text{réduit}}$ est intègre.

Réciproquement, si $X = V(I) \cup V(J)$, alors tout premier p contient IJ , donc $IJ \subset \sqrt{0}$. Comme $\sqrt{0}$ est premier par hypothèse, on en déduit que $I \subset \sqrt{0}$ ou $J \subset \sqrt{0}$, donc $V(I) = X$ ou $V(J) = X$, donc X est irréductible.

Exercice 4 (1) Soit $V(I_1) \supset V(I_2) \supset V(I_3) \supset \dots$ une suite décroissante de fermés. Comme $V(I) = V(\sqrt{I})$, on peut supposer que les I_k sont des idéaux *radicaux* (c'est-à-dire égaux à leur propre radical). Alors la chaîne décroissante ci-dessus est équivalente à $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$. Comme A est noëthérien, cette chaîne est stationnaire, donc la chaîne de fermés de départ aussi.

(2) Soit E l'ensemble des Y qui n'ont pas de décomposition en réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles. Si $E \neq \emptyset$, on choisit $\mathcal{Y}_1 \in E$. Si $\mathcal{Y}_1$ n'est pas minimal pour l'inclusion, on choisit $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}_1$, etc. Comme X est noëthérien, la suite ainsi construite est stationnaire en $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y} \in E$. Comme $\mathcal{Y}$ n'est pas irréductible (étant dans E) on a $\mathcal{Y} = Z \cup Z'$ avec $Z, Z' \neq \mathcal{Y}$, donc $Z, Z' \notin E$, donc Z et Z' sont réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles, donc $\mathcal{Y}$ aussi, contradiction.

Exercice 5 (1) On va montrer que les idéaux premiers minimaux de $A = k[x, y, z]/(y^2 - xz, z^2 - y^3)$ sont $I_1 = (y, z)$ et $I_2 = (y - x^2, z - x^3)$. En effet, si (x, y, z) est un k -point de $\text{Spec}(A)$, alors les équations impliquent que $z^2 = yxz$. Si $z = 0$, alors $y = 0$ et x est arbitraire, donc, l'ensemble $Y_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in k\}$ est inclus dans $\text{Spm}(A)$. Si $z \neq 0$, alors $z = xy$ et $xz = y^2$. D'où $y = z/x$ et

¹On dit parfois simplement *premier* au lieu d'*idéal premier*.

$z^2/x^2 = xz$, donc $z = x^3$ et $y = x^2$. Cela montre que l'ensemble algébrique $Y_2 = \{(x, x^2, x^3) \mid x \in k\}$ est inclus dans $\text{Spm}(A)$. Les quotients A/I_i sont isomorphes à $k[t]$, donc I_i est premier. On a vérifié que $Y_1 \cup Y_2 = \text{Spm}(A)$ comme ensembles. Comme Y_i est irréductible de dimension 1 et $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$, cela implique que Y_1, Y_2 sont les composantes irréductibles de $\text{Spec}(A)$.

(2) On a $f(x, y, z) = x$ pour $(x, y, z) \in Y_2$ et $f(x, y, z) = 0$ pour $(x, y, z) \in Y_1$. Donc, f est bien défini au niveau ensembliste : en l'unique point d'intersection, les deux valeurs de f coïncident. Supposons que $g \in A$ et si $(x, y, z) \in \text{Spm}(A)$ avec $x \neq 0$, alors $g(x, y, z) = y/x$ comme fonctions. Alors, il existe $b > 0$ tel que $x^b(xg - y)$ appartient à l'idéal $(y^2 - xz, z^2 - y^3)$, soit

$$x^b(xg - y) = (y^2 - xz)p + (z^2 - y^3)q$$

En posant $z = 0$ on obtient l'égalité de polynômes dans $k[x, y]$

$$x^b(xg(x, y, 0) - y) = y^2p(x, y, 0) - y^3q(x, y, 0)$$

Donc, il existe $h \in k[x, y]$ tel que $xg(x, y, 0) - y = y^2h$. Posant $x = 0$, on obtient $-y = y^2h(0, y)$ dans $k[y]$, contradiction.

Exercice 6 Soit X espace topologique séparé et irréductible. Si $x, y \in X$ et $x \neq y$ alors il y a deux ouverts $U \subset X$ et $V \subset X$ tel que $U \cap V = \emptyset$, contradiction. Donc, X est un point (s'il est non vide).

Soit X un espace topologique irréductible, $U \subset X$ un ouvert non vide. Soit $\overline{U} \subset X$ l'adhérence de U , alors $Y = X - U$ est fermé et $Y \cup \overline{U} = X$, donc $\overline{U} = X$. En particulier, si $U, V \subset X$ sont deux ouverts non vides, $U \cap V \neq \emptyset$.

Soit X un espace irréductible, $U \subset X$ un ouvert non vide. Supposons que U n'est pas irréductible, alors il y a deux ouverts non vides $U_1, U_2 \subset U$ tel que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Mais les U_i sont aussi ouverts dans X , contradiction. Donc, U est irréductible.

Si X est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible, alors $\overline{Y}$ est aussi irréductible. En effet, si $Y_1 \subset Y_2 = \overline{Y}$ est une décomposition de Y en une réunion de deux fermés, alors les $Y_i \cap Y$ sont fermés dans Y et leur réunion contient Y , donc pour $i = 1$ ou 2 on a $Y \subset Y_i$, mais alors $\overline{Y} \subset Y_i$.

Exercice 7 Pour (i) $\Rightarrow$ (ii) : si $A \simeq A_1 \times A_2$, alors $I = A_1 \times \{0\}$ et $J = \{0\} \times A_2$ sont des idéaux et $X \simeq V(I) \sqcup V(J)$ (vérifiez-le) n'est pas connexe.

Pour (ii) $\Rightarrow$ (iii) : si $e \in A$ est un idempotent distinct de 0 et 1, alors $f = 1 - e$ l'est aussi, et $ef = 0$. Considérons le morphisme $i: A \rightarrow A/(e) \times A/(f)$. On vérifie que le morphisme $j: A/(e) \times A/(f) \rightarrow A$, qui envoie $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ sur $a_1f + a_2e$, est bien défini et est un isomorphisme inverse pour f .

Pour (iii) $\Rightarrow$ (i) : supposons que X est non connexe, donc réunion disjointe de deux fermés stricts $V(I) \sqcup V(J)$ où $I, J \neq A$. On a $I + J = A$, car sinon $I + J$ serait inclus dans un idéal maximal p qui appartiendrait donc à $V(I)$ et à $V(J)$. On voit aussi que $I \cap J$ est nilpotent, car pour tout idéal premier p , on a $p \supset I$ ou $p \supset J$, donc $p \supset I \cap J$ dans tous les cas ; ainsi $I \cap J$ est dans l'intersection de tous les idéaux premiers, i.e. le nilradical. De $I + J = A$ on tire une écriture $i + j = 1$, et il existe n tel que $(ij)^n = 0$. En prenant les puissances n -ièmes on obtient $i^n + j^n + x = 1$ où x est nilpotent. Donc $u = 1 - x$ est inversible, et il est alors facile de vérifier que $e := u^{-1}i^n$ est idempotent. Par ailleurs e est distinct de 0 et 1 car $I, J \neq A$.

Exercice 8 Les idéaux premiers miniaux de $k[x, y, z]/(x^2 - yz, xz - x)$ sont (x, y) et (x, z) et $(z - 1, x^2 - y)$. Les composantes irréductibles de Y s'intersectent, donc Y est connexe.

Théorème 9 Soit A un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative, c'est-à-dire telle que $1 \in S$ et $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$. Alors il existe un anneau noté $S^{-1}A$ (ou parfois A_S) et un morphisme $f: A \rightarrow S^{-1}A$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux $g: A \rightarrow B$ tel que $g(s)$ est inversible pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme $\tilde{g}: S^{-1}A \rightarrow B$ tel que $g = \tilde{g}f$.

L'anneau $S^{-1}A$ est appelé *localisé de A par rapport à S* , ou l'*anneau de fractions* à dénominateurs dans S .

Exercice 10 (1) Soit $S^{-1}A$ le quotient de l'ensemble des couples $(a, s) \in A \times S$ pour la relation d'équivalence

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists t \in S, t(s'a - sa') = 0.$$

(si on écrit simplement $(s'a - sa') = 0$, la relation obtenue n'est pas transitive). La classe de (a, s) est notée a/s , et on munit $S^{-1}A$ d'une structure d'anneau en posant

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{s'a + sa'}{ss'} \quad \text{et} \quad \frac{a}{s} \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

Le morphisme canonique $f: A \rightarrow S^{-1}A$ envoie a sur $a/1$. Le reste est laissé en exercice.

Le noyau de $f: A \rightarrow S^{-1}A$ est l'ensemble des éléments de A qui sont annulés par un élément de S .

(2) Tout idéal $J \subset S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}I$, si on pose $I = f^{-1}(J)$. Il est alors clair que si A est noëthérien, alors $S^{-1}A$ est noëthérien.

(3) Dans le cas des idéaux premiers, il est facile de voir que les deux applications suivantes sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} \{p \in \text{Spec}(A), p \cap S = \emptyset\} &\longrightarrow \text{Spec}(S^{-1}A) \\ p &\mapsto S^{-1}p := f(p).S^{-1}A \\ q &\longleftarrow f^{-1}(q) \end{aligned}$$

Attention : en général, la partie $\{p \in \text{Spec}(A), p \cap S = \emptyset\}$ n'est ni ouverte, ni fermée dans $X = \text{Spec}(A)$.

Remarque : Étant donné un A -module M et $S \subset A$ une partie multiplicative, il y a un localisé $S^{-1}M$ qui vérifie la propriété que vous imaginez. La preuve ci-dessus marche quasiment mot pour mot.

Exercice 11 Premier exemple, le corps des fractions K d'un anneau intègre A est le localisé par rapport à la partie $S = A \setminus \{0\}$. En général, si A n'est pas intègre, on peut définir l'*anneau total des fractions* qui est le localisé $S^{-1}A$ où S est l'ensemble des éléments non diviseurs de 0 de A . En géométrie, cela correspond aux fonctions rationnelles (fonctions définies au point générique d'une composante irréductible).

Deuxième exemple, le cas où S est « de type fini » i.e. engendré par un nombre fini d'éléments $f_1, \dots, f_n$. En géométrie, cela correspond à l'immersion ouverte du lieu où les fonctions f_i ne s'annulent pas dans X .

Enfin, si $S = A \setminus p$, où p est premier, on note $A_p := S^{-1}A$ et on l'appelle le *localisé de A en p* . En géométrie, il correspond à l'anneau des germes de fonctions sur $X = \text{Spec}(A)$ au point p .

Théorème 12 Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A -module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \pmod{I}$, tel que $aM = 0$.

Preuve : Soient $m_1, \dots, m_r$ des générateurs de M , et soit le vecteur colonne

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} \in M^r$$

Par hypothèse, pour tout k il existe une écriture $m_k = i_{k,1}m_1 + \dots + i_{k,r}m_r$. Ceci peut se réécrire $P \cdot \mathbf{m} = 0$, où $P = \text{Id} - (i_{k,l})$ est une matrice (r, r) : ceci a bien un sens si on voit $\text{GL}_r(A)$ comme agissant sur M^r . En multipliant P à gauche par la transposée de sa comatrice, on en déduit que $\det(P) \cdot \mathbf{m} = 0$. Donc $a = \det(P)$ annule chaque m_k , donc il annule M . Comme de plus $P \equiv \text{Id} \pmod{I}$, on a bien $a \equiv 1 \pmod{I}$. $\square$

Corollaire 13 Soit A local d'idéal maximal m . Soit M un A -module fini. Si $M = mM$, alors $M = 0$.

Immédiat en prenant $I = m$.

Exercice 14 Les morphismes canoniques α, γ proviennent du fait que $f \notin p$, et les morphismes β, δ sont les morphismes de réduction modulo l'idéal maximal pA_p . (Notez que de manière générale, pour M un A -module et $I \subset A$ un idéal, on a $M \otimes_A A/I \simeq M/IM$.) Fixons une fois pour toutes une base $e_1, \dots, e_n$ du $A[\frac{1}{f}]$ -module libre $A[\frac{1}{f}]^n$. Les images des e_i dans $(A_p)^n$ et $k(p)^n$ donnent des bases dans ces modules libres ; on les notera encore e_i quand il n'y aura pas de confusion possible.

(1) le morphisme $M_p \rightarrow M \otimes k(p) \simeq M_p/pM_p$ est surjectif. On peut donc choisir un relevé $x_i \in M_p$ de chaque $\varphi(e_i)$ (il faudrait écrire $(\varphi\beta\alpha)(e_i)\dots$). Ceci définit un morphisme $\psi: (A_p)^n \rightarrow M_p$ par $\psi(e_i) = x_i$. Soit $K = \text{coker}(\psi)$. Comme le produit tensoriel est exact à droite (i.e. il préserve les coker), on a $K \otimes k(p) \simeq \text{coker}(\psi \otimes k(p)) = \text{coker}(\varphi) = 0$. Par Nakayama, $K = 0$ donc ψ est surjectif.

(2) On a $x_i = \frac{m_i}{s_i}$ avec $m_i \in M$ et $s_i \in A$, $s_i \notin p$. Posons $f = s_1 \dots s_n$, il est clair que x_i provient d'un élément $y_i \in M[\frac{1}{f}]$ (qui s'écrit encore $y_i = \frac{m_i}{s_i}$, avec les abus de notations évidents). Donc on peut définir $\chi: A[\frac{1}{f}]^n \rightarrow M[\frac{1}{f}]$ par $\chi(e_i) = y_i$.

(3) Soient $\mu_1, \dots, \mu_r$ des générateurs de M , alors leurs images dans $M[\frac{1}{f}]$ engendrent ce dernier. On note encore μ_k (au lieu de $\mu_k/1$) les images dans $M[\frac{1}{f}]$ (et dans M_p). Il suffira que μ_i soit dans l'image de χ pour que χ soit surjectif. Or, comme ψ est surjectif, on peut écrire dans M_p

$$\mu_k = \psi \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{k,i}}{t_{k,i}} e_i \right)$$

pour des éléments $a_{k,i} \in A$ et $t_{k,i} \notin p$. Il est clair que si on multiplie f par le produit des $t_{k,i}$ ($1 \leq k \leq r$, $1 \leq i \leq n$) alors toutes les égalités écrites ont un sens dans les localisés par rapport à f , à la place des localisés par rapport à $A \setminus p$. En d'autres termes, $\mu_k = \chi \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{k,i}}{t_{k,i}} e_i \right)$ dans $M[\frac{1}{f}]$.

Concluons : pour tout q dans l'ouvert $U = D(f)$, en tensorisant par le corps résiduel $k(q)$ on voit que $\chi \otimes k(q)$ est surjectif, donc $d(q) = \dim_{k(q)}(M \otimes_A k(q)) \leq n$. Par conséquent $\{p \in \text{Spec}(A) ; d(p) \leq n\}$ est ouvert, donc $\{p \in \text{Spec}(A) ; d(p) \geq n+1\}$ est fermé, ce qu'on voulait.

Exercice 15 Le fait que les trois anneaux soient noëthériens et intègres est connu. De plus A_1 et A_3 sont locaux car ce sont des localisés en un idéal premier, et A_2 est local d'idéal maximal (x) , comme il est bien connu. Enfin les idéaux maximaux sont clairement principaux.

Montrons que les idéaux d'un anneau de valuation discrète général A , d'idéal maximal $m = (x)$, sont les idéaux (x^k) , $k \geq 0$. Soit $I \subset A$ un idéal. Soit $i \in I$, comme $I \subset m$ et que A est noëthérien, il est facile de voir qu'il existe un entier n maximal tel que $i = x^n u$. Alors $u \notin m$ donc il est inversible. On montre ensuite facilement que $I = (x^k)$ où k est l'entier minimal intervenant dans une telle écriture pour les $i \in I$.

Exercice 16 On peut prendre par exemple $M = K$, on a alors $M \otimes k = M/mM = 0$, mais $M \neq 0$. On peut même avoir $M \otimes_A K = 0$, en prenant par exemple $M = K/R$ où l'inclusion de modules $R \subset K$ est simplement l'inclusion comme sous-anneau. Vérifiez qu'alors $M \otimes_A K = 0$ et $M \otimes k = 0$.

En termes géométriques, ceci vous dit qu'il existe des faisceaux quasi-cohérents non nuls sur des schémas, dont toutes les fibres sont nulles. Attention : ici, *fibre* s'entend au sens $\otimes k(x)$ et non $\otimes \mathcal{O}_{X,x}$; il y a parfois cette ambiguïté de langage. Par ailleurs, on peut montrer que si les fibres au sens $\otimes \mathcal{O}_{X,x}$ sont toutes nulles, alors le faisceau est nul.