

TD - Feuille 2

Corrigé ex. 1 Soit $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas. En prenant les sections globales du morphisme de faisceaux $f^\sharp: \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ on obtient un morphisme $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Réciproquement, soit $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'anneaux. Considérons un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(B_i)$. En composant φ avec l'application de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = B_i$, on obtient un morphisme $A \rightarrow B_i$ qui induit un morphisme de schémas $f_i: U_i \rightarrow \text{Spec}(A)$. Pour que les f_i se recollent en un morphisme $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$, il faut vérifier qu'ils coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$. Le schéma $U_i \cap U_j$ n'est pas nécessairement affine (nous verrons plus loin dans le cours qu'il l'est si X est *séparé*), mais on peut toujours le recouvrir par des schémas affines $V_{i,j}^k = \text{Spec}(C_{i,j}^k)$. Alors il est clair que f_i et f_j coïncident sur chaque $V_{i,j}^k$, en vertu de l'égalité des applications de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$ et $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$. On obtient ainsi $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$. Nous laissons de côté la vérification du fait que les applications $f \mapsto \varphi$ et $\varphi \mapsto f$ sont inverses l'une de l'autre.

Plus généralement, soit k un anneau et supposons que X et $\text{Spec}(A)$ sont des k -schémas. Alors les mêmes raisonnements montrent se donner un morphisme de k -schémas $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ est la même chose que se donner un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

En particulier, se donner une fonction globale sur X (i.e. un élément de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$) est la même chose que se donner un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[T] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et cela revient donc à se donner un morphisme de schémas $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]) = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$.

Remarque Le titre (« *Foncteur de points* ») mérite une explication, qui n'est pas essentielle pour ce cours en particulier, mais utile dans certains sujets de géométrie algébrique plus avancée (par exemple, les groupes algébriques, ou schémas en groupes). Voici quelques pistes. À tout schéma X on peut associer son foncteur de points h_X de la façon suivante. Si T est un schéma, on pose $h_X(T) = \text{Hom}(T, X)$, l'ensemble des morphismes de schémas de T dans X , qu'on appelle l'ensemble des *points de X à valeurs dans T* . La terminologie vient du fait que si T est le spectre d'un corps k , un morphisme $T \rightarrow X$ est donné par un point $x \in X$ et un morphisme de corps $k(x) \hookrightarrow k$, cf Hartshorne ex. 2.7 page 80. On appelle h_X le foncteur de points de X . Le *lemme de Yoneda* montre que h_X caractérise X , précisément, le foncteur

$$h: \text{Sch} \rightarrow \text{Fonct}((\text{Sch})^\circ, \text{Ens})$$

est pleinement fidèle (ce qui veut dire grosso modo que c'est un plongement de catégories). (La notation $(\text{Sch})^\circ$ désigne la catégorie opposée à la catégorie des schémas.) L'exercice que nous venons de faire décrit le foncteur de points d'un schéma affine : $h_{\text{Spec}(A)}(T) = \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$. Pour le lemme de Yoneda, voir par exemple D. EISENBUD, J. HARRIS, *The geometry of schemes*.

Corrigé ex. 2 (1) Commençons par quelques remarques sur les sous-schémas ouverts et fermés d'un schéma X . La notion de sous-schéma ouvert est plus simple car sur un ouvert U de l'espace topologique X , il n'existe qu'une seule structure de sous-schéma (telle que l'inclusion $U \hookrightarrow X$ soit un morphisme de schémas). En revanche, sur un fermé $Y \subset X$, il existe plusieurs structures de sous-schéma. Voici une explication intuitive pour cela. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et $f \in A$ une fonction. Dire que f est inversible c'est pareil que dire que f^n est inversible pour n'importe quel $n \geq 1$, et vous pouvez vérifier qu'en effet le morphisme canonique $A[\frac{1}{f^n}] \rightarrow A[\frac{1}{f}]$ est un isomorphisme. En d'autres termes les sous-schémas $D(f)$ et $D(f^n)$ sont les mêmes. En revanche, l'idée de départ de la théorie des schémas c'est de dire que l'annulation de f ou l'annulation de f^n , ce n'est pas la même chose, et la conséquence est que les sous-schémas fermés $V(f)$ et $V(f^n)$ ne sont pas les mêmes (on a une inclusion stricte $V(f) \subsetneq V(f^n)$).

Pour la définition de sous-schéma ouvert, voir Hartshorne, chapitre II, paragraphe 3, après 3.2.2.

Pour une définition de sous-schéma fermé, voir Hartshorne, chapitre II, paragraphe 3, après 3.2.2. On peut la reformuler à l'aide de faisceaux quasi-cohérents d'idéaux, qui apparaîtront bientôt dans le cours. Pour cela

voir : Hartshorne chapitre II, paragraphe 5 ; exemple 5.2.2 ; définition après 5.8.1, proposition 5.9, corollaire 5.10. Pour une explication détaillée sur les faisceaux quasi-cohérents d'idéaux, voir Eisenbud-Harris, I.2.1.

Passons à la correction de l'exercice. L'idée est la suivante : considérant le comorphisme $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$, pour que f se factorise par un sous-schéma fermé Y défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, il faut que $\mathcal{I} \subset \ker(f^\#)$. Le plus petit sous-schéma fermé correspond au plus grand idéal, donc on pose $\mathcal{I} = \ker(f^\#)$. On note alors $Y = V(\mathcal{I}) \subset X$. Il est facile de vérifier qu'il satisfait la propriété demandée.

Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait en fait s'assurer que $\mathcal{I}$ est bien un faisceau quasi-cohérent d'idéaux (lire Eisenbud-Harris, I.2.1 pour bien comprendre pourquoi). Ce point est plus subtil, j'y reviendrai dans la remarque qui suit le corrigé de cet exercice.

(2) Pour des détails sur la structure de schéma réduite sur un fermé de X , voir Hartshorne, chapitre II, exemple 3.2.6 ; nous en reparlerons de toute façon en TD. Si Z est réduit, notons W le sous-schéma fermé de X défini par la structure réduite sur l'adhérence de l'image ensembliste de f . Clairement l'application ensembliste sous-jacente à f se factorise en $f' : Z \rightarrow W$. Par ailleurs pour toute fonction φ sur un ouvert $U \subset X$ qui est nulle sur $U \cap W$, $\varphi \circ f'$ est nulle car elle est nulle en tout point de Z et celui-ci est réduit. Donc le morphisme de faisceaux de fonctions $f^\#$ induit $(f')^\# : \mathcal{O}_W \rightarrow f'_*\mathcal{O}_Z$. On a ainsi défini un morphisme de schémas $f' : Z \rightarrow W$ tel que f se factorise par f' . Or l'image schématique Y est le plus petit sous-schéma qui vérifie cette propriété donc $Y \subset W$. Comme de plus Y contient l'image ensembliste de f et est réduit (car localement son anneau de fonctions A/I est un sous-anneau d'un anneau de fonctions sur un ouvert de Z qui est réduit), on obtient $W \subset Y$. D'où égalité.

Remarque -1- Une condition nécessaire pour que $\mathcal{I}$ soit un faisceau quasi-cohérent est que $f_*\mathcal{O}_Z$ soit quasi-cohérent, car le noyau d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents est quasi-cohérent (Hartshorne chapitre II, proposition 5.7). Ceci est vrai si Z est noethérien (Hartshorne chapitre II, proposition 5.8(c)). On peut aussi éviter de faire cette hypothèse en faisant comme suit.

Considérons d'abord le cas où $X = \text{Spec}(A)$ est affine. Alors $f : Z \rightarrow \text{Spec}(A)$ est donné par $\xi : A \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. Soit $I = \ker(\xi)$, alors le sous-schéma fermé $\text{Spec}(A/I) \subset \text{Spec}(A)$ satisfait la propriété universelle recherchée, donc $\text{Spec}(A/I)$ est l'image schématique de f .

Si X est arbitraire, pour chaque ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ avec $V := f^{-1}(U)$, l'image schématique de $f|_V : V \rightarrow U$ existe et est définie par l'idéal $I = \ker(A \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V))$. De plus, pour chaque inclusion d'ouverts affines $U' \subset U$, le morphisme $U' \rightarrow U$ est plat, donc $A \rightarrow A'$ est plat aussi de sorte que le produit tensoriel $\otimes_A A'$ préserve le noyau, donc $\ker(A' \rightarrow \Gamma(V', \mathcal{O}_{V'})) = I \otimes_A A'$. Ceci nous dit que la restriction à U' de l'image schématique de $V \rightarrow U$ est l'image schématique de $V' \rightarrow U'$. (N.B. l'évocation de la platitude est essentielle ici ; nous étudierons cette notion plus en détail plus tard.)

Maintenant recouvrons X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(A_i)$ et posons $f_i = f|_{f^{-1}(U_i)}$. D'après ce qui précède, l'image schématique de f_i et celle de f_j coïncident sur tous les ouverts affines $U_k \subset U_i \cap U_j$, donc sur $U_i \cap U_j$. Donc ces images schématiques se recollent en un sous-schéma fermé de X .

Remarque -2- Il y a plusieurs notions d'*images* pour un morphisme de schémas, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Sur l'image au sens ensembliste, il n'y a pas en général de structure de schéma naturelle. Le meilleur résultat disponible est le théorème de Chevalley : *l'image ensembliste d'un morphisme de type fini de schémas noethériens est constructible* (une partie constructible d'un espace topologique est une partie qui est réunion finie de parties localement fermées). Pour plus de détails sur les différentes notions d'images, voir Eisenbud-Harris paragraphe V.1.

Corrigé ex. 3 (1) Se donner un élément $x \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ (une fonction) c'est la même chose que se donner un morphisme de A -algèbres $A[X] \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Se donner x tel que $x^n = 1$ c'est se donner un morphisme de A -algèbres $A[X]/(X^n - 1) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On pose donc $\mu_{n,A} = \text{Spec}(A[X]/(X^n - 1))$. D'après la description des morphismes de X vers un schéma affine, ce schéma vérifie bien la propriété demandée.

D'après sa définition même, $\mu_{n,A}$ classe les racines n -ièmes de l'unité parmi les fonctions de A -schémas variables, on dit que c'est l'*espace de modules des racines n -ièmes de l'unité*.

(2) Sur les points, m est la multiplication $(x, x') \mapsto xx'$. Il s'agit de décrire ce morphisme en termes de schémas. On a $\mu_{n,A} = \text{Spec}(A[X]/(X^n - 1))$ et $\mu_{n,A} \times_{\text{Spec}(A)} \mu_{n,A} = \text{Spec}(A[Y]/(Y^n - 1) \otimes_A A[Z]/(Z^n - 1))$. (On y voit plus clair dans le calcul de l'anneau produit tensoriel si on donne des noms différents Y, Z aux

variables.) Or il est clair que $A[Y]/(Y^n - 1) \otimes_A A[Z]/(Z^n - 1) \simeq A[Y, Z]/(Y^n - 1, Z^n - 1)$, donc m est un morphisme de schémas affines et il faut trouver le morphisme correspondant $m^\sharp: A[X]/(X^n - 1) \rightarrow A[Y, Z]/(Y^n - 1, Z^n - 1)$. Intuitivement, la formule $m^\sharp(f) = f \circ m$ dit que pour une fonction $f = f(x)$ sur $\mu_{n,A}$, on a $m^\sharp(f)(y, z) = f(yz)$, en particulier $m^\sharp(x) = yz$. Il suffit de poser $m^\sharp(x) = yz$ pour définir un morphisme $m^\sharp: A[X]/(X^n - 1) \rightarrow A[Y, Z]/(Y^n - 1, Z^n - 1)$.

(3) Décrivons $\mu_{p,\mathbb{Q}}$. On sait que $X^p - 1 = (X - 1)\Phi_p(X)$ où $\Phi_p(X)$ est le polynôme cyclotomique qui est irréductible. Ceci donne un isomorphisme $\mathbb{Q}[X]/(X^p - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[X]/(X - 1) \times \mathbb{Q}[X]/(\Phi_p)$ et donc $\mu_{p,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathbb{Q}) \amalg \text{Spec}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$. C'est une somme disjointe d'un $\mathbb{Q}$ -point (de degré 1 sur $\mathbb{Q}$) et d'un $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ -point (de degré $p - 1$ sur $\mathbb{Q}$).

Les propriétés du polynôme cyclotomique Φ_p sur $\mathbb{F}_{p'}$ pour $p' \neq p$ sont les mêmes que sur $\mathbb{Q}$, donc la description de $\mu_{p,\mathbb{F}_{p'}}$ est essentiellement la même que ci-dessus.

Enfin $\mu_{p,\mathbb{F}_p}$ est très différent car $\mathbb{F}_p[X]/(X^p - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[X]/(X - 1)^p$ est une $\mathbb{F}_p$ -algèbre locale non réduite. Donc $\mu_{p,\mathbb{F}_p}$ est topologiquement un point, avec un anneau de fonctions non réduit (et de degré toujours p sur la base).

Remarque J'ai évoqué plus haut le fait que le foncteur de Yoneda $h: \text{Sch}/S \rightarrow \text{Fonct}((\text{Sch}/S)^\circ, \text{Ens})$ est pleinement fidèle. On dit qu'un foncteur $F: (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ est *représentable* par un schéma X si $F \simeq h_X$. Le lemme de Yoneda implique qu'un tel X est alors unique (à isomorphisme unique près). Nous venons de montrer que le foncteur des racines n -ièmes de l'unité définit par

$$F(T) = \{\text{racines } n\text{-ièmes de l'unité de } \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\}$$

est représentable par un schéma $\mu_{n,S}$.

Par ailleurs le schéma $\mu_{n,A}$ muni de sa multiplication et de la section unité $\text{Spec}(A) \rightarrow \mu_{n,A}$ donnée par le morphisme $A[X]/(X^n - 1) \rightarrow A, X \mapsto 1$ est un *schéma en groupes*. L'existence de la structure de groupe sur $\mu_{n,A}$ est en fait automatique dès que son foncteur de points F est un *foncteur en groupes* i.e. il y a une structure de groupe sur $F(T)$, fonctorielle en T .

Le schéma en groupes $\mu_{p,\mathbb{F}_p}$ est de degré p sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et topologiquement ne possède qu'un point ; on dit que c'est un *schéma en groupes infinitésimal*.

Corrigé ex. 4 Soit $Z \subset \mathbb{P}_k^3$ la sous-variété définie en coordonnées homogènes $(a : b : c : d)$ par les équations $ac = b^2, ad = bc, bd = c^2$. C'est une variété déterminantielle car les équations sont les mineurs $(2, 2)$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $Y \subset Z$ et si on construit un morphisme $f: Z \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ qui est inverse pour ν_3 on aura tout démontré. Si $z = (a : b : c : d) \in Z$ alors a ou d est non nul, dans le premier cas on pose $f(z) = (a : b)$ et dans le second on pose $f(z) = (c : d)$. Il est facile de vérifier que ces deux expressions coïncident sur l'ouvert $\{a \neq 0, d \neq 0\}$, donc on a bien défini un morphisme f sur Z , et que c'est un inverse pour ν_3 .

Une autre façon de montrer que Z est bien l'image de ν_3 est de considérer le morphisme d'anneaux gradués induit par ν_3 , à savoir $\nu_3^\sharp: k[a, b, c, d] \rightarrow k[x, y]$ défini par $a \mapsto x^3, b \mapsto x^2y, c \mapsto xy^2, d \mapsto y^3$, et de montrer que l'idéal J engendré par les polynômes $ac = b^2, ad = bc, bd = c^2$ est égal à tout le noyau. (Ceci anticipe un peu sur la suite, car cela sous-entend que l'image est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_k^3$, propriété fondamentale des morphismes projectifs que l'on verra plus tard.) Pour cela on utilise les trois équations de J pour chasser tous les monômes en b^2, c^2 et bc . Ainsi, si P est dans le noyau, on peut l'écrire de manière unique $P = Q + Rb + Sc$ où $Q, R, S \in k[a, d]$. Alors $0 = P(x^3, x^2y, xy^2, y^3) = Q(x^3, y^3) + R(x^3, y^3)x^2y + S(x^3, y^3)xy^2$ et, comme les valeurs des exposants de x et y dans les trois termes sont distinctes modulo 3, on en déduit que $Q = R = S = 0$.

Corrigé ex. 5 (1) Si $I(Y)$ est engendré par $n - r$ éléments $f_1, \dots, f_{n-r}$ alors ensemblistement c'est l'intersection des hypersurfaces $H_i = \{f_i = 0\}$.

(2) Soit $I = (ac - b^2, ad - bc, bd - c^2)$ l'idéal de Y . On note qu'il ne contient pas d'élément de degré 1 alors que la partie I_2 de degré 2 est de dimension 3. Si I a deux générateurs u, v alors il contient les composantes de degré 2 notées u_2, v_2 et celles-ci doivent être des générateurs de l'espace vectoriel I_2 . C'est impossible.

(3) Le plus délicat est de trouver Y_3 , et pour cela on suit l'indication en allant au plus simple. On produit une matrice $(3, 3)$ à part de la matrice $(3, 2)$ de l'exercice précédent, en ajoutant une ligne de la façon la plus naturelle :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & a \end{pmatrix}.$$

En développant selon la dernière ligne pour faire apparaître les générateurs de I , ceci mène à l'hypersurface Y_3 d'équation $c(bd - c^2) - d(ad - bc) + a(ac - b^2) = 0$. On prend pour Y_2 l'hypersurface d'équation $ac = b^2$, de sorte que $Y_2 \cap Y_3$ est définie par $ac = b^2$ et $c(bd - c^2) = d(ad - bc)$. Il reste à montrer que $ad - bc$ et $bd - c^2$ s'annulent sur $Y_2 \cap Y_3$. Or, sur $Y_2 \cap Y_3$,

$$\begin{aligned} ad(ad - bc) &= c(abd - b^2c) = bc(ad - bc) \text{ donc } (ad - bc)^2 = 0, \\ c^2(bd - c^2) &= d(b^2d - bc^2) = bd(bd - c^2) \text{ donc } (bd - c^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Soit J l'idéal de $Y_2 \cap Y_3$, on a montré que $I^2 \subset J \subset I$. Ceci signifie que l'intersection $Y_2 \cap Y_3$ au sens des schémas est comprise entre Y et son premier voisinage infinitésimal dans $\mathbb{P}_k^3$.

Corrigé ex. 6 Fixons des coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ sur l'espace projectif. Sur l'ouvert standard $U_i = \{x_i \neq 0\}$ les fonctions x_j/x_i sont bien définies, et $U_i = \text{Spec}(k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i])$. Une fonction globale sur $\mathbb{P}_k^n$ est donnée par des fonctions f_i sur U_i qui coïncident sur les $U_i \cap U_j$. L'inclusion $U_i \cap U_j \subset U_i$ correspond au morphisme d'anneaux $k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i] \hookrightarrow k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i, x_i/x_j]$ et $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ s'écrit $f_i(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) = f_j(x_0/x_j, \dots, x_n/x_j)$. Si $i \neq j$ et f_i n'est pas un polynôme constant, alors le degré en x_i de $f_i(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i)$ est strictement négatif, ce qui n'est pas possible dans $f_j(x_0/x_j, \dots, x_n/x_j)$. Par contraposée, f_i est égale à une constante $\lambda \in k$, et par symétrie f_j est aussi une constante qui est nécessairement λ .

Remarque C'est un fait général que les schémas projectifs (plus généralement, propres) ont « peu » de fonctions, à savoir que l'espace des fonctions est de dimension finie, par opposition aux schémas affines qui en ont beaucoup. Plus généralement, le *théorème de finitude* de Serre-Grothendieck dit que pour tout k -schéma propre X et tout $\mathcal{O}_X$ -module cohérent $\mathcal{F}$, les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie.

Corrigé ex. 7 (1) Si $M_p = 0$ alors I n'est pas inclus dans p . En effet, si $m_1, \dots, m_r \in M$ engendrent M et $M_p = 0$ alors il existe $b_i \in A \setminus p$ tel que $b_i m_i = 0$. Donc pour $b = b_1 \dots b_r$ on voit que $b \in I$ et $b \notin p$.

Dans l'autre sens, si $M_p \neq 0$, alors $I \subset p$. En effet, si $m/1 \neq 0$ dans M_p , alors pour tout $b \in A \setminus p$ on a $bm \neq 0$, donc $b \notin I$ et $I \subset p$.

(2) Soit $A = k[t]$, soit M un k -espace vectoriel avec un endomorphisme $\bar{t}$. Pour $f \in A$ la condition que f est dans l'annulateur de A -module m devient $f(\bar{t}) = 0$. Donc, l'annulateur $I \subset A$ de M est (P) , où P est le polynôme minimal de $\bar{t}$.

Corrigé ex. 8 (1) $\Rightarrow$ (2) : si A est un AVD, les propriétés d'une valuation impliquent que l'ensemble des $x \in A$ tels que $v(x) > 0$ est un idéal m . Par ailleurs, soit $x \in A \setminus m$, c'est-à-dire $v(x) = 0$. Soit x^{-1} son inverse dans K , alors $v(x) + v(x^{-1}) = v(xx^{-1}) = v(1) \geq 0$ implique $v(x^{-1}) \geq 0$ donc $x^{-1} \in A$. Ainsi l'ensemble des éléments non inversibles de A est l'idéal m , donc A est local d'idéal maximal m . Soit π un élément de valuation égale à 1, il est facile de voir que m est principal engendré par π .

(2) $\Rightarrow$ (3) est clair.

(3) $\Rightarrow$ (4) : on note π un générateur de l'idéal maximal m ; il est clair que π est irréductible. Soit $x \in A$ non nul, si on montre qu'il existe un n maximal tel que $x \in (\pi^n)$, alors $x = u\pi^n$ avec $u \notin (\pi)$, donc u est inversible, et on a gagné. Considérons donc l'idéal $I = \bigcap_{n \geq 1} (\pi^n)$. Il est clair que $\pi I \subset I$. Réciproquement si $x \in I$ alors pour tout $n \geq 1$ on a une écriture $x = \pi^n x_n$. Ainsi pour tout m on a $x_1 \in (\pi^m)$, puisque $x = \pi x_1 = \pi^{m+1} x_{m+1}$ et A est intègre. Donc $x_1 \in I$, puis $x \in \pi I$. Comme A est supposé noëthérien, I est un A -module fini, donc on peut appliquer le lemme de Nakayama qui fournit un $a \in A$ avec $a = 1 + \pi b$ tel que $aI = 0$. Ainsi $a \notin m$, donc a est inversible, donc $I = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : on définit v par $v(x) = n$ où $x = u\pi^n$.

Corrigé ex. 9 L'idéal maximal de A_1, A_2, A_3 est engendré par f, x, p , respectivement. Je ne détaille pas plus.