

Résumé sur les schémas Proj

Soit S un anneau gradué i.e. $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ avec $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$. Un idéal *homogène* I de S est un idéal qui est somme directe des $I \cap S_d$, ou de manière équivalente, un idéal engendré par des éléments homogènes.

On pose $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$, c'est un idéal homogène.

Pour tout $f \in S$ homogène, on note $(S_f)_0$ ou $S_{(f)}$ le sous-anneau des éléments de degré 0 dans le localisé S_f .

Définitions. $\text{Proj}(S) = \{ \text{idéaux premiers homogènes } p \subset S \text{ qui ne contiennent pas } S_+ \}$,
 $D_+(f) = \{ p \in \text{Proj}(S) \text{ tels que } f \notin p \}$,
 $V_+(I) = \{ p \in \text{Proj}(S) \text{ tels que } I \subset p \}$.

En particulier, $V_+(f) := \text{Proj}(S) \setminus D_+(f)$.

Lemme. Les $V_+(I)$ sont les fermés d'une topologie sur $\text{Proj}(S)$. De plus on a une bijection $D_+(f) \rightarrow \text{Spec}(S_{(f)})$ obtenue en envoyant p sur $pS_f \cap S_{(f)}$.

Proposition. Il existe une unique structure de schéma sur $\text{Proj}(S)$ qui sur chaque ouvert $D_+(f)$ coïncide avec la structure de schéma affine $\text{Spec}(S_{(f)})$.

Les $D_+(f)$ forment une base de la topologie de $\text{Proj}(S)$, mais ce ne sont pas *tous* les ouverts.

Exemple. Si A est un anneau et $S = A[x_0, \dots, x_n]$ alors $\text{Proj}(S)$ est l'espace projectif sur A noté $\mathbb{P}_A^n$. Les ouverts $D_+(x_i) = \text{Spec}(A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}])$ sont les ouverts standard.

De la même manière que les A -modules M définissent des faisceaux de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ sur $X = \text{Spec}(A)$, les S -modules gradués M définissent des faisceaux de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ sur $X = \text{Proj}(S)$ tels que $\mathcal{F}_{|D_+(f)} = \widetilde{M_{(f)}}$ où $M_{(f)}$ est le sous-module des éléments de degré 0 dans le localisé M_f .

Exemple. Sur S gradué, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a le module gradué $M(n) := \bigoplus_{d \geq 0} S_{d+n}$, c'est-à-dire que $M(n)_d = S_{d+n}$. Ce module définit un faisceau $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ sur $X = \text{Proj}(S)$, noté $\mathcal{O}_X(n)$.



À partir de maintenant, on supposera que S est engendré comme S_0 -algèbre par S_1 .

Dans ce cas, $\text{Proj}(S)$ est recouvert par les $D_+(f)$ avec f homogène de degré 1.

Proposition. $\mathcal{O}_X(n)$ est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible.

Preuve. Pour f homogène de degré 1, la multiplication par f^n définit un morphisme de S -modules gradués $S \xrightarrow{f^n} S(n)$. En localisant on trouve $S_{(f)} \xrightarrow{f^n} S(n)_{(f)}$ qui est un isomorphisme puisque f est inversible dans S_f . Ainsi $\mathcal{O}_X(n)_{|D_+(f)} \simeq \mathcal{O}_{D_+(f)}$. Comme les $D_+(f)$ avec f homogène de degré 1 recouvrent $\text{Proj}(S)$, c'est fini.

Lemme. $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$.

Preuve. Sur $D_+(f)$ on a $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} = f^n \mathcal{O}_{D_+(f)}$ et $\mathcal{O}_X(m)|_{D_+(f)} = f^m \mathcal{O}_{D_+(f)}$. Il est clair que les morphismes $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$ définis localement sur $D_+(f)$ par $f^n s \otimes f^m t \mapsto f^{n+m} st$ se recollent.

Proposition. Soit $X = \mathbb{P}_A^n$. Alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$ est isomorphe au A -module $A[x_0, \dots, x_n]_m$ des polynômes homogènes de degré m .

Preuve pour $m = 1$. Soit $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$. On recouvre X par les $U_i = D_+(x_i)$. On a

$$f|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(1)(U_i) = x_i \mathcal{O}_X(U_i) = x_i A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \subset A\left[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_0}, \dots, \frac{1}{x_n}\right].$$

En choisissant un $i \neq i_0$ on voit que f n'a pas de x_{i_0} en dénominateur. Comme $f|_{U_i} \in x_i \mathcal{O}_X(U_i)$ on voit que f est un polynôme homogène de degré 1. Réciproquement si $f = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n$ avec $a_i \in A$ alors il est clair que f définit une section globale de $\mathcal{O}_X(1)$, égale sur U_i à

$$(a_0 \frac{x_0}{x_i} + \dots + a_n \frac{x_n}{x_i}) x_i.$$

Reformulation en termes plus intrinsèques. Soit E un A -module libre de rang $n+1$. Posons $\mathbb{P}(E) = \text{Proj}(\text{Sym}(E))$, c'est naturellement un schéma sur $Y = \text{Spec}(A)$ i.e. on a un morphisme $q : \mathbb{P}(E) \rightarrow Y$. Il est muni aussi d'un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ construit ci-dessus, dont le module de sections globales est isomorphe à E . (Tout cela est le résumé de ce qui précède, où l'on a pris $E = Ax_0 \oplus \dots \oplus Ax_n$, c'est-à-dire qu'on a fixé une base $x_0, \dots, x_n$ de E . On a obtenu $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_A^n$.) Le pullback $q^* \tilde{E}$ du faisceau libre $\tilde{E}$ sur Y est un faisceau libre de rang $n+1$ sur $\mathbb{P}(E)$. Par abus, on le note souvent $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$. On a un morphisme $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ défini ainsi : une section $s \otimes f$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{P}(E)$, où s est un élément de E identifié à $\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1))$ et f est une section de $\mathcal{O}(1)$, est envoyée sur $fs|_U$. (Exercice : réécrire ceci en éliminant tous les abus de notation.) Ce morphisme est surjectif, car en tout point de l'espace projectif il existe une section globale de $\mathcal{O}(1)$ (en fait, l'une des sections x_i) qui ne s'annule pas.

Fibrés projectifs. Si Y est un schéma de base quelconque et $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre de rang $n+1$, alors par définition il existe un recouvrement de Y par des ouverts $U_i = \text{Spec}(A_i)$ tels que $\mathcal{E}|_{U_i}$ est libre. Alors $E_i = \Gamma(U_i, \mathcal{E})$ est un A_i -module libre de rang $n+1$ et on peut former $\mathbb{P}(E_i) = \text{Proj}(\text{Sym}(E_i))$. Par canonicité de cette construction, ces schémas se recollent le long des différents U_i en un Y -schéma que l'on note **Proj**(Sym($\mathcal{E}$)) ou **P**($\mathcal{E}$). Les faisceaux inversibles $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_i)}(1)$ et les morphismes surjectifs $E_i \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_i)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_i)}(1)$ se recollent en un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$ et un morphisme surjectif $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$. On appelle **P**($\mathcal{E}$) le *fibré projectif* sur Y associé à $\mathcal{E}$.

Références :

Pour plus de détails, aller voir Hartshorne, *Algebraic Geometry*, chapitre II, fin du paragraphe 7.