

TD - Feuille 1

Exercice 1 Soit k un corps et $f : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ le morphisme défini par $f(x, y) = y^2 - x^3$.

(1) Calculez Ω_f^1 et reliez-le à $\Omega_{\mathbb{A}_k^1/k}^1$ et $\Omega_{\mathbb{A}_k^2/k}^1$.

(2) Soit $C = V(f)$. Calculez $\Omega_{C/k}^1$ et reliez-le à $\Omega_{\mathbb{A}_k^2/k}^1$.

Exercice 2 Soit ℓ/k une extension finie de corps. En utilisant des sous-extensions monogènes, montrez que $\Omega_{\ell/k}^1 = 0$ si et seulement si ℓ/k est séparable.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur un corps k et $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif correspondant (notation de Grothendieck).

(1) Rappelez la définition de $\mathbb{P}(E)$ comme schéma, et la propriété universelle qu'il vérifie.

On souhaite établir la *suite exacte d'Euler* :

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/k}^1(1) \rightarrow E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0$$

où $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ est l'application d'évaluation. On pose $\mathcal{K} = \ker(E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1))$, on fixe une base $x_0, \dots, x_n$ de E , et on note $x_{k/i} = \frac{x_k}{x_i}$, pour $k \neq i$, les coordonnées affines sur l'ouvert standard $U_i = \{x_i \neq 0\}$.

(2) Que mettre à la place de $*$ pour définir sur U_i un morphisme $\varphi_i : \Omega_{\mathbb{P}(E)/k}^1(1) \rightarrow \mathcal{K}$ par

$$\sum_{k \neq i} dx_{k/i} \otimes g_k \mapsto x_0 \otimes \frac{g_0}{x_i} + \dots + x_{i-1} \otimes \frac{g_{i-1}}{x_i} + x_i \otimes * + x_{i+1} \otimes \frac{g_{i+1}}{x_i} + \dots + x_n \otimes \frac{g_n}{x_i} \quad ?$$

(3) Vérifiez que les morphismes φ_i se recollent en un isomorphisme $\Omega_{\mathbb{P}(E)/k}^1(1) \rightarrow \mathcal{K}$ sur X .

Exercice 4 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang r sur un schéma X et σ une section de $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X$ sur un ouvert U . Sous l'hypothèse que l'image de σ dans $\mathcal{F}$ est nulle, on souhaite lui associer une section $d\sigma$ de $\Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}$. Pour cela, on écrit $\sigma = \sigma_1 \otimes f_1 + \dots + \sigma_n \otimes f_n$. Puis sur des ouverts assez petits qui recouvrent U , on prend une trivialisatation locale de $\mathcal{F}$ et on différentie les coordonnées de σ dans cette trivialisatation ; précisément, localement

$$\mathcal{F}|_V = \mathcal{O}_V t_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_V t_r \quad , \quad \sigma_i = \sigma_{i1} t_1 \oplus \dots \oplus \sigma_{ir} t_r$$

et on pose

$$d_V \sigma = \sum_{i=1}^n d\sigma_{i1} \otimes f_i t_1 \oplus \dots \oplus \sum_{i=1}^u d\sigma_{ir} \otimes f_i t_r .$$

Montrez que les d_V se recollent en une section bien définie $d\sigma$ de $\Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}$. (Commencez par le cas $r = 1$.) Utilisez ceci pour retrouver la suite exacte d'Euler de l'exercice précédent.