

TD - Feuille 1

Corrigé ex. 1 (1) On utilise la première suite exacte fondamentale :

$$f^* \Omega_{\mathbb{A}_k^1/k}^1 \rightarrow \Omega_{\mathbb{A}_k^2/k}^1 \rightarrow \Omega_f^1 \rightarrow 0 .$$

Tous les schémas sont affines : posons $A = k[t]$, $B = k[x, y]$, $f^\# : A \rightarrow B$ donné par $t \mapsto y^2 - x^3$. La suite exacte ci-dessus est déterminée par la suite exacte de modules sur $B = k[x, y]$:

$$Bdt \rightarrow Bdx \oplus Bdy \rightarrow \Omega_f^1 \rightarrow 0$$

où $dt \mapsto 2ydy - 3x^2dx$. On trouve $\Omega_f^1 = \frac{Bdx \oplus Bdy}{2ydy - 3x^2dx}$.

(2) On utilise la seconde suite exacte fondamentale :

$$\mathcal{C}_{C/\mathbb{A}_k^2} \rightarrow i^* \Omega_{\mathbb{A}_k^2/k}^1 \rightarrow \Omega_{C/k}^1 \rightarrow 0$$

où $\mathcal{C}$ désigne le faisceau conormal, et $i : C \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ l'immersion fermée. Notons I l'idéal engendré par $y^2 - x^3$ dans B , on obtient la suite exacte de $C = B/I$ -modules :

$$I/I^2 \rightarrow Cdx \oplus Cdy \rightarrow \Omega_{C/k}^1 \rightarrow 0 .$$

La flèche $I/I^2 \rightarrow Cdx \oplus Cdy$ est donnée par $y^2 - x^3 \mapsto 2ydy - 3x^2dx$ (on note avec une barre les images dans C). On trouve $\Omega_{C/k}^1 = \frac{Cdx \oplus Cdy}{2ydy - 3x^2dx}$.

Corrigé ex. 2 Si ℓ/k est une extension séparable, elle est monogène (théorème de l'élément primitif). Donc $\ell = k[x]/(P)$ pour un certain polynôme P . Alors, $\Omega_{\ell/k}^1 = \ell dx / (P'(x)dx)$. Comme P est séparable, P' et P sont premiers entre eux, ou dit autrement $P'(x)$ est inversible dans $k[x]/(P)$. Il en résulte que $\Omega_{\ell/k}^1 = 0$.

Si ℓ/k n'est pas séparable, il existe une sous-extension monogène et inséparable $m \subset \ell$. La première suite exacte fondamentale donne

$$\Omega_{m/k}^1 \otimes \ell \rightarrow \Omega_{\ell/k}^1 \rightarrow \Omega_{\ell/m}^1 \rightarrow 0 .$$

Par ailleurs $\ell = m[x]/(P)$ pour un certain polynôme inséparable P . On a donc $P' = 0$ puis $\Omega_{\ell/m}^1 = \ell \neq 0$. Comme $\Omega_{\ell/k}^1$ a une surjection vers $\Omega_{\ell/m}^1$, on a $\Omega_{\ell/k}^1 \neq 0$.

Corrigé ex. 3 (1) La notation de Grothendieck est celle pour laquelle, lorsque le corps de base est algébriquement clos, l'ensemble des points fermés de $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des hyperplans linéaires (et non des droites) de E . En termes de schémas, on a $\mathbb{P}(E) = \text{Proj}(\text{Sym}(E))$ où $\text{Sym}(E) = \bigoplus_{i \geq 0} E^{\otimes i}$ est l'algèbre symétrique de E . Le schéma $\mathbb{P}(E)$ est muni d'un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ tel que $\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1)) = E$, et d'un morphisme surjectif $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1)$. (Sur tout schéma X , on note $E \otimes \mathcal{O}_X$ le fibré vectoriel trivial dont chaque fibre est E .)

La propriété universelle est la suivante. Pour tout schéma X , tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et tout morphisme surjectif de fibrés $\varphi : E \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$, il existe un unique morphisme de schémas $f : X \rightarrow \mathbb{P}(E)$ tel que $\mathcal{L} \simeq f^* \mathcal{O}(1)$; deux couples $(\mathcal{L}, \varphi)$ et $(\mathcal{L}', \varphi')$ tels qu'il existe un isomorphisme $\tau : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ avec $\varphi' = \tau \circ \varphi$ donnent lieu au même morphisme f .

Réciproquement, si $f : X \rightarrow \mathbb{P}(E)$ est un morphisme, posons $\mathcal{L} = f^* \mathcal{O}(1)$. En tirant la surjection $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ en arrière via f , on obtient un morphisme surjectif $\varphi : E \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$.

(2) Sur un ouvert U , l'évaluation $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ envoie $\sum x_i \otimes f_i$, où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{P}(E)$ sur U , sur $\sum x_i|_U f_i$. Un élément de $\mathcal{K}(U)$ est donc tel que $\sum x_i|_U f_i = 0$. L'étoile doit donc vérifier

$$\sum_{k \neq i} x_k \frac{g_k}{x_i} + x_i * = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad * = -\frac{1}{x_i^2} \sum_{k \neq i} x_k g_k .$$

(3) Il s'agit de vérifier que φ_i et φ_j coïncident sur $U_i \cap U_j$. Or sur $U_i \cap U_j$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} dx_{k/i} \otimes g_k &= \sum_{k \neq i} d \frac{x_{k/j}}{x_{i/j}} \otimes g_k = \sum_{k \neq i} \frac{x_{i/j} dx_{k/j} - x_{k/j} dx_{i/j}}{x_{i/j}^2} \otimes g_k \\ &= \sum_{k \neq i, j} \frac{dx_{k/j}}{x_{i/j}} \otimes g_k - \sum_{k \neq i} \frac{x_{k/j} dx_{i/j}}{x_{i/j}^2} \otimes g_k = \sum_{k \neq i, j} dx_{k/j} \otimes \frac{g_k}{x_{i/j}} - dx_{i/j} \otimes \sum_{k \neq i} \frac{x_{k/j}}{x_{i/j}^2} g_k. \end{aligned}$$

Par φ_j cet élément est envoyé sur un élément dont on va calculer la composante sur $x_k \otimes$.

Si $k \neq i, j$ la composante est $\frac{g_k}{x_{i/j} x_j} = \frac{g_k}{x_i}$.

Si $k = i$ la composante est

$$-\sum_{k \neq i} \frac{x_{k/j} g_k}{x_{i/j}^2 x_j} = -\frac{1}{x_i^2} \sum_{k \neq i} x_k g_k.$$

Si $k = j$ la composante est 0. On voit donc que l'image de $\sum dx_{k/i} \otimes g_k$ par φ_i et φ_j est la même, donc ces morphismes se recollent. Sur chaque ouvert U_i il est clair que φ_i est un isomorphisme, donc le morphisme φ obtenu par recollement est un isomorphisme.

Corrigé ex. 4 Pour l'application à la suite exacte d'Euler, on n'a besoin que du cas $r = 1$. Dans ce cas, les notations sont significativement plus simples, donc si vous n'aviez pas fait l'exercice, je vous encourage à réécrire la preuve ci-dessous dans le cas $r = 1$.

Une façon de voir que les $d_V \sigma$ se recollent est de vérifier que $d_V \sigma$ ne dépend pas de la trivialisation choisie pour $\mathcal{F}$ sur V . En effet, si tel est le cas, étant donné un autre ouvert W avec une trivialisation de $\mathcal{F}$ sur W , alors sur l'ouvert $V \cap W$ on a deux trivialisations de $\mathcal{F}$ (celle provenant de V , et celle provenant de W), et donc $(d_V \sigma)|_{V \cap W}$ et $(d_W \sigma)|_{V \cap W}$ coïncident donc se recollent sur $V \cup W$.

Si on a une autre trivialisation donnée par des générateurs t'_j , alors il existe une matrice M inversible à coefficients $m_{i,j} \in \mathcal{O}_X(V)$ telle que $t = Mt'$ où $t = (t_1, \dots, t_r)$. On a donc

$$t_i = \sum_{j=1}^r m_{i,j} t'_j \quad \text{puis} \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} t_j = \sum_{k=1}^r \underbrace{\sum_{j=1}^r \sigma_{ij} m_{j,k}}_{\sigma'_{i,k}} t'_k.$$

L'expression $(d_V \sigma)_{t'}$ associée à la trivialisation de générateurs t' est :

$$\begin{aligned} (d_V \sigma)_{t'} &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n d\sigma'_{i,k} \otimes f_i t'_k = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r \sigma_{ij} dm_{j,k} + m_{j,k} d\sigma_{ij} \right) \otimes f_i t'_k \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} f_i dm_{j,k} \otimes t'_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r d\sigma_{ij} \otimes f_i \sum_{k=1}^r m_{j,k} t'_k \end{aligned}$$

Comme l'image de σ dans $\mathcal{F}$ est nulle, on a $\sum_{i=1}^n \sigma_{ij} f_i = 0$ pour tout j . De plus $\sum_{k=1}^r m_{j,k} t'_k = t_j$ donc on trouve finalement $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r d\sigma_{ij} \otimes f_i t_j$ c'est-à-dire $(d\sigma)_t$. On a montré que $d_V \sigma$ ne dépend pas de la trivialisation locale, donc par recollement on obtient $d\sigma$.

Pour le fibré en droites $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif, cette construction fournit un morphisme $\mathcal{K} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/k}^1(1)$. Il est facile de voir directement que c'est un isomorphisme. De manière alternative, on peut vérifier que ce morphisme est un inverse pour l'application définie dans l'exercice précédent.

TD - Feuille 2

Corrigé ex. 1 Soit $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas. En prenant les sections globales de $f^\sharp: \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ on obtient un morphisme $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Réciproquement, soit $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'anneaux. Considérons un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(B_i)$. En composant

φ avec l'application de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = B_i$, on obtient un morphisme $A \rightarrow B_i$ qui induit un morphisme de schémas $f_i: U_i \rightarrow \text{Spec}(A)$. Pour que les f_i se recollent en un morphisme $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$, il faut vérifier qu'ils coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$. Le schéma $U_i \cap U_j$ n'est pas nécessairement affine (nous verrons plus loin dans le cours qu'il l'est si X est *séparé*), mais on peut toujours le recouvrir par des schémas affines $V_{i,j}^k = \text{Spec}(C_{i,j}^k)$. Alors il est clair que f_i et f_j coïncident sur chaque $V_{i,j}^k$, en vertu de l'égalité des applications de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$ et $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$. On obtient ainsi $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$. Je laisse de côté la vérification du fait que les applications $f \mapsto \varphi$ et $\varphi \mapsto f$ sont inverses l'une de l'autre.

Plus généralement, soit k un anneau et supposons que X et $\text{Spec}(A)$ sont des k -schémas. Alors les mêmes raisonnements montrent se donner un morphisme de k -schémas $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ est la même chose que se donner un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Corrigé ex. 2 Pour les questions (1) et (2), il suffit de montrer que les morphismes en question sont des isomorphismes sur les fibres en tout point $x \in X$. Comme les faisceaux localement libres sont alors libres sur $\mathcal{O}_{X,x}$, c'est clair.

Pour (3), l'assertion à démontrer est locale sur X . On peut donc se restreindre à un ouvert $U = \text{Spec}(A)$ sur lequel $\mathcal{L}$ est libre. On a donc un isomorphisme $i: A \rightarrow \mathcal{L}(U)$, notons t l'image de 1 par i de sorte que $\mathcal{L}|_U = t\mathcal{O}_U$. On note encore par la lettre s la restriction de la section globale s à U , de sorte que $s = ta$ pour un $a \in A$. Alors le germe s_x en un point x de U est non nul ssi a_x est non nul, de sorte que $X_s \cap U = D(a)$. C'est bien un ouvert.

Corrigé ex. 3 Je vous conseille vivement de regarder ce que la bijection de l'énoncé donne lorsque X est le spectre d'un corps : on doit retrouver le fait que l'ensemble des k -points de $\mathbb{P}(E)$ est en bijection avec l'ensemble des hyperplans vectoriels de E .

Passons à la démonstration de la propriété universelle. Étant donné un morphisme $f: X \rightarrow \mathbb{P}(E)$, en prenant les images inverses de la surjection universelle $E \rightarrow \mathcal{O}(1)$, on déduit un morphisme surjectif $E \rightarrow \mathcal{L}$ où $\mathcal{L} := f^*\mathcal{O}(1)$. (Notez que f^*E est le fibré E sur X , que l'on note encore E .)

En sens inverse, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X avec un morphisme surjectif $E \rightarrow \mathcal{L}$. Fixons $e_1, \dots, e_n$ une base de E (l'espace vectoriel), qui donne une base de sections globales de E (le fibré). Soit s_i l'image de e_i dans $\mathcal{L}$. Le fait que $E \rightarrow \mathcal{L}$ soit surjectif dit qu'en tout point $x \in X$, l'un des germes $s_{i,x}$ est non nul, et donc que X est recouvert par les ouverts $V_i = \{x \in X, s_{i,x} \neq 0\}$. (Les propriétés des germes impliquent que V_i est ouvert.) On souhaite définir $f: X \rightarrow \mathbb{P}(E)$; on va le définir sur chacun des V_i de façon à ce que tout se recolle. Sur V_i ce morphisme sera à valeurs dans l'ouvert standard $U_i = \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}(E)$ (les coordonnées x_i sont déterminées par la base $e_1, \dots, e_n$). Autour de chaque point $x \in V_i$ il existe un ouvert U tel que $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_{X|U}$. Soit t un générateur local de $\mathcal{L}$ sur U , alors on a $s_i = a_i t$ pour $a_i \in \mathcal{O}_X(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Comme on est dans V_i , on a $a_i \neq 0$ sur U . Donc le morphisme suivant est bien défini :

$$\begin{array}{ccc} k \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ \frac{x_j}{x_i} & \longmapsto & \frac{a_j}{a_i} \end{array}$$

Or on sait qu'un morphisme d'un schéma X vers un schéma affine $\text{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (c'est un exercice dans Hartshorne, faites-le). Dans notre cas, le morphisme d'anneaux ci-dessus détermine un morphisme

$$U \longrightarrow U_i \subset \mathbb{P}(E)$$

Clairement, tout ceci ne dépend pas du choix du générateur t (car un autre générateur est de la forme λt avec $\lambda \in \mathcal{O}_U(U)^\times \dots$), et se recolle sur tous les $U \subset V_i$ pour définir un morphisme $V_i \rightarrow \mathbb{P}(E)$, puis en recollant sur les V_i , on obtient $f: X \rightarrow \mathbb{P}(E)$.

Pour bien faire les choses, il faut démontrer que ces constructions sont inverses l'une de l'autre... (en tenant compte du quotient par les sections globales de $\mathcal{O}_X^\times$).

Corrigé ex. 4 Voir Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, proposition 6.1.26 (page 218 de l'édition en couverture rigide).

TD - Feuille 3

Corrigé ex. 1 (1) Non, ce n'est pas possible, cf théorème 1.4.12 du cours.

(2) Oui, car par exemple si Y est affine d'anneau A et si X est défini par une équation f qui est non diviseur de 0 dans A , l'immersion i est régulière. Il suffit de choisir f pour que X soit singulier. On prend par exemple pour S le spectre d'un corps k , $Y = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ et X une courbe singulière de Y (équation $y^2 = x^3$, ou $y^2 = x^2(x+1)$, ou...).

(3) Oui, c'est possible. Là encore on peut prendre pour S le spectre d'un corps k . Le plus simple est de prendre pour $X = \{x\}$ un point (réduit), on est sûr qu'il est lisse. Il faut ensuite choisir Y non lisse tel que X soit immergé dedans par une immersion i non régulière. Par le théorème 1.4.12 du cours, qui est une équivalence, si Y est non lisse en x , l'immersion i ne sera pas régulière. On peut donc prendre pour Y une k -courbe singulière et $X = \{x\}$ l'un des points singuliers.

(4) Oui, c'est possible. On prend encore $S = \text{Spec}(k)$. Voici d'abord un exemple avec X non réduit : prenons $Y = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ et posons $A = k[x, y]$. Soit X le point double i.e. le point non réduit défini par l'idéal $I = (x^2, xy, y^2)$. Si $i : X \hookrightarrow Y$ était régulière, alors I/I^2 serait un A/I -module localement libre de rang égal à la codimension de X dans Y c'est-à-dire 2. Comme ici X est un schéma local, c'est-à-dire A/I est local, en fait I/I^2 serait A/I -module libre de rang 2. Or il est visible que I/I^2 ne peut pas être engendré par 2 éléments, donc c'est impossible.

Voici maintenant un exemple avec X réduit. On va prendre un X qui n'est pas intersection complète (cf exercice à suivre), c'est-à-dire qui ne peut être défini dans Y par $r = \text{codim}(X, Y)$ équations (c'est donc le même phénomène que dans l'exemple précédent). On prend $Y = \mathbb{A}_k^3 = \text{Spec}(k[x, y, z])$ et on pose $A = k[x, y, z]$. On prendra pour X l'image du morphisme $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow Y$ donné par $t \mapsto (t^2, t^3, t^5)$. En d'autres termes, $x = t^2$, $y = t^3$ et $z = t^5$. L'image est le sous-schéma fermé $X \subset Y$ d'équations $x^3 = y^2$, $x^5 = z^2$ et $y^5 = z^3$. Soit I l'idéal de $k[x, y, z]$ engendré par ces trois éléments. Si $i : X \hookrightarrow Y$ était régulière, alors I/I^2 serait un A/I -module localement libre de rang 2. En particulier, en localisant en l'origine $P = (0, 0, 0)$ correspondant dans A à l'idéal maximal (x, y, z) , le module I_P/I_P^2 devrait être A_P/I_P -module libre de rang 2. Ici encore, un calcul assez facile montre que ce module ne peut pas être engendré par 2 éléments, donc i n'est pas régulière. (Il suit du théorème 1.4.12 du cours que $X = \text{Spec}(A/I)$ n'est pas lisse, sans vérification.)

Corrigé ex. 2 (1) On a $\mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_X(U) = \text{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[T], \mathcal{O}_X(U))$, d'après la propriété universelle de l'anneau des polynômes. D'après la description que l'on a vue des morphismes vers un schéma affine, ceci n'est autre que $\text{Hom}_{A\text{-Sch}}(U, \text{Spec}(A[T]))$ i.e. $\text{Hom}_{A\text{-Sch}}(U, \mathbb{A}_A^1)$.

(2) Se donner un élément $z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ revient à se donner un morphisme de A -algèbres $A[T] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, tel que l'image de T est z . Donc se donner un élément $z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $z^n = 1$ revient à se donner un morphisme de A -algèbres $A[T]/(T^n - 1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Posons $\mu_{n,A} = \text{Spec}(A[T]/(T^n - 1))$, on voit donc qu'on a la bijection attendue.

Voici les propriétés de $\mu_{n,A}$. C'est un A -schéma fini car son algèbre de fonctions est A -module fini. Ainsi, il est de type fini, séparé, propre. De plus, cet anneau est A -module libre de base $1, T, \dots, T^{n-1}$. En particulier, c'est un module plat. Donc $\mu_{n,A}$ est fini et plat, de degré n . Pour tester les propriétés de lissité, on peut calculer $\Omega_{\mu_{n,A}/A}^1$. Posons $B = A[T]/(T^n - 1)$, alors c'est le faisceau associé au B -module $BdT/nT^{n-1}dT$ qui est isomorphe comme B -module à B/nB , puisque T , donc T^{n-1} , est inversible dans B . Si n est inversible dans A , alors $\Omega_{\mu_{n,A}/A}^1 = 0$ et $\mu_{n,A}$ est étale, donc non ramifié et lisse. Plus généralement, $\mu_{n,A}$ est étale au-dessus de l'ouvert $U = D(n) \subset \text{Spec}(A)$ (qui peut être vide). Si A est un corps de caractéristique divisant n , on a $\mu_{n,A} \simeq B$ qui est B -module libre de rang 1. Donc $\mu_{n,A}$ n'est pas étale, ou de manière équivalente, n'est pas lisse (puisque étant de dimension relative 0 sur $\text{Spec}(A)$, lisse = étale).

Passons à connexe, affine, réduit, normal (en fait, affine est clair).

Commençons par le cas où $A = k$ est un corps, qui est plus facile. Soit p la caractéristique de k . Si p est premier avec n , alors $\mu_{p,k}$ est étale sur $\text{Spec}(k)$ qui est réduit et normal, donc il est lui-même réduit et normal (on peut aussi le voir par calcul direct...). Par ailleurs, le polynôme $T - 1$ est premier avec $T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T + 1$ d'où un isomorphisme d'anneaux

$$k[T]/(T^n - 1) \rightarrow k[T]/(T - 1) \times k[T]/(T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T + 1)$$

et sur les spectres

$$\mu_{n,k} = \text{Spec}(k) \amalg \text{Spec}(k[T]/(T^{n-1} + T^{n-2} + \dots + T + 1)) .$$

Donc il n'est pas connexe. Passons au cas où p divise n i.e. $n = pm$. Alors $T^n - 1 = (T^m - 1)^p$ donc $\mu_{n,k}$ n'est pas réduit, a fortiori pas normal. Si $n = p^u$ est une puissance de p , alors $T^n - 1 = (T - 1)^{p^u}$ donc $\mu_{n,k}$ est connexe : topologiquement, il n'a qu'un point. Si n possède un facteur q premier à p , on voit comme ci-dessus (dans l'étude du cas n premier à p) que $\mu_{n,k}$ n'est pas connexe.

Si $A = \mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ se plonge dans $\mathbb{Q}[T]/(T^n - 1)$ qui est réduit, donc $\mu_{n,\mathbb{Z}}$ est réduit. Pour la normalité, rappelons que souvent, en géométrie algébrique, on utilise la définition *locale* qui est que A (ou un schéma X) est normal ssi tous ses anneaux locaux A_p (resp. les $\mathcal{O}_{X,x}$) sont normaux, i.e. intègres et intégralement clos. Dans notre cas, on peut voir que le localisé de $\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ en un idéal maximal $(p, T - 1)$, pour un premier p divisant n , n'est pas intègre, en particulier pas normal (je laisse les détails...).

(3) Se donner un élément $z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ inversible revient à se donner un morphisme de A -algèbres $A[T, 1/T] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, tel que l'image de T est z . Donc $\mathbb{G}_{m,A} = \text{Spec}(A[U, 1/U])$ répond à la question. Le morphisme $A[U, 1/U] \rightarrow A[T]/(T^n - 1)$ qui envoie U sur T est bien défini car T est inversible dans l'anneau du but. Ce morphisme est surjectif (c'est le quotient par l'idéal $(U^n - 1)$) et il lui correspond une immersion fermée $i : \mu_{n,A} \hookrightarrow \mathbb{G}_{m,A}$. Cette immersion est régulière, car définie par l'élément $U^n - 1$ non diviseur de 0 dans $A[U, 1/U]$. Elle est différentiellement lisse car toute immersion l'est. Elle n'est pas plate car $A[T]/(T^n - 1)$ n'est pas $A[U, 1/U]$ -module plat : par exemple, le morphisme injectif $A[U, 1/U] \rightarrow A[U, 1/U]$ défini par la multiplication par $U^n - 1$ devient, après tensorisation $\otimes_{A[U, 1/U]} A[T]/(T^n - 1)$, le morphisme nul, non injectif. A fortiori, i n'est pas lisse.

Corrigé ex. 3 (1) Soit $e = e_1, \dots, e_r$ une base de L et $g = g_1, \dots, g_t$ une base de N . Le rang de M est donc $s = r + t$. Pour $1 \leq i \leq r$ posons $f_i = e_i$, et pour $r + 1 \leq i \leq s$ choisissons un antécédent $f_i \in M$ de g_{i-r} . Alors la famille des f_i est une base de M . (Ceci peut se justifier par exemple en disant que l'association $g_{i-r} \mapsto f_i$ pour $r + 1 \leq i \leq s$ définit une section de $M \rightarrow N$, i.e. un isomorphisme $M \simeq L \oplus N$.) On définit un morphisme de $\wedge^r L \otimes \wedge^t N \rightarrow \wedge^s M$ en envoyant $(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \otimes (g_1 \wedge \dots \wedge g_t)$ sur $f_1 \wedge \dots \wedge f_s$. Comme $\det(L) \otimes \det(N)$ et $\det(M)$ sont libres de rang 1 et que notre morphisme envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme.

Supposons qu'on change les bases e, g pour e', g' et qu'on choisit des antécédents f'_i pour les g'_i avec $r + 1 \leq i \leq s$. Alors il existe des matrices inversibles à coefficients dans A telles que $e' = Ue$, $g' = Wg$. La matrice de passage V de la base f à la base f' est triangulaire par blocs avec U et W comme blocs diagonaux. Le calcul du déterminant matriciel donne $\det(V) = \det(U) \det(W)$. Notre morphisme

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \otimes (g_1 \wedge \dots \wedge g_t) \mapsto f_1 \wedge \dots \wedge f_s$$

devient

$$(e'_1 \wedge \dots \wedge e'_r) \otimes (g'_1 \wedge \dots \wedge g'_t) \mapsto f'_1 \wedge \dots \wedge f'_s .$$

Comme $e'_1 \wedge \dots \wedge e'_r = (\det(U))e_1 \wedge \dots \wedge e_r$, $g'_1 \wedge \dots \wedge g'_t = (\det(W))g_1 \wedge \dots \wedge g_t$ et $f'_1 \wedge \dots \wedge f'_s = (\det(V))f_1 \wedge \dots \wedge f_s$, on voit que la définition du morphisme est inchangée. Elle ne dépend donc d'aucun choix, elle est canonique.

En particulier, dans la situation d'une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang fini sur un schéma X , on peut définir cet isomorphisme localement sur des ouverts sur lesquels les faisceaux sont libres. Comme il est canonique, la définition est cohérente sur les intersections d'ouverts, de sorte que l'isomorphisme se recolle en un isomorphisme global sur X .

(2) On pose $W = Z_1 \times_Y Z_2$ et $h = (i_1, i_2) : X \rightarrow W$. Il est facile de voir que comme i_1 et i_2 sont des immersions régulières, alors h l'est aussi. On utilise les suites exactes données par l'énoncé :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{X/Z_1} \rightarrow \mathcal{C}_{X/W} \rightarrow h^* \Omega_{W/Z_1}^1 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{X/Z_1} \rightarrow \mathcal{C}_{X/W} \rightarrow h^* \Omega_{W/Z_1}^1 \rightarrow 0 .$$

Notons $p_1 : W \rightarrow Z_1$ et $p_2 : W \rightarrow Z_2$ les projections. Par sa définition même, $W \rightarrow Z_1$ est le pullback de $Z_2 \rightarrow Y$. Une propriété des faisceaux de différentielles est que $\Omega_{W/Z_1}^1 = p_2^* \Omega_{Z_2/Y}^1$. Il s'ensuit que

$$h^* \Omega_{W/Z_1}^1 = h^* p_2^* \Omega_{Z_2/Y}^1 = i_2^* \Omega_{Z_2/Y}^1 .$$

De la même manière, on a $h^*\Omega_{W/Z_2}^1 = i_1^*\Omega_{Z_1/Y}^1$. Comme Z_1 et Z_2 sont lisses sur Y , les faisceaux $i_1^*\Omega_{Z_1/Y}^1$ et $i_2^*\Omega_{Z_2/Y}^1$ sont localement libres sur X . Comme i_1 et i_2 sont des immersions régulières, les faisceaux conormaux qui apparaissent dans les suites exactes courtes ci-dessus sont aussi localement libres sur X . On peut donc appliquer la question (1) et prendre le déterminant. On obtient un isomorphisme canonique composé

$$\det(\mathcal{C}_{X/Z_1}) \otimes i_2^*(\det \Omega_{Z_2/Y}^1) \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{C}_{X/W}) \xleftarrow{\sim} \det(\mathcal{C}_{X/Z_2}) \otimes i_1^*(\det \Omega_{Z_1/Y}^1).$$

En tensorisant par les faisceaux inverses (duaux) de $\det(\mathcal{C}_{X/Z_1})$ et $\det(\mathcal{C}_{X/Z_2})$, on en déduit l'isomorphisme recherché.

(3) Par définition d'un morphisme localement d'intersection complète, on se ramène localement à la situation de (2) qui fournit un faisceau $\det(\mathcal{C}_{X/Z_1})^\vee \otimes i_1^*(\det \Omega_{Z_1/Y}^1)$ unique à isomorphisme canonique près. Cette construction canonique se recolle sur les ouverts.

Corrigé ex. 4 On peut prendre pour S le spectre d'un corps non parfait k , et pour X le spectre d'une extension finie purement inséparable ℓ de k . Cela répond aux deux questions. On peut ensuite, si on y tient, faire des variations plus géométriques, en partant de cet exemple (par exemple, tout ℓ -schéma lisse X donne encore un exemple).

TD - Feuille 4

Corrigé ex. 1 Une petite mise en garde : la notation $\text{Div}(X)$ désigne le groupe des diviseurs de Weil dans Hartshorne, et le groupe des diviseurs de Cartier dans Liu...

Passons à (1). Dans la courbe singulière d'équation $y^2 = x^3$, le point singulier est un diviseur de Weil, mais pas un diviseur de Cartier puisqu'il ne peut pas être défini localement par une seule équation (en effet, l'idéal maximal (x, y) de l'anneau local en la singularité n'est manifestement pas monogène).

(2) Notons $f = (y - x)/x$ et soit P le point singulier. En tout point $Q \neq P$, f est bien définie et non nulle. Il en découle que la restriction de D à $U := C \setminus \{P\}$ est le diviseur nul, donc le diviseur de Weil associé $[D_U]$ est nul. Il nous reste à calculer la multiplicité de D en P . Notons $A = k[x, y]_{(x, y)}$. On a $\mathcal{O}_{C, P}/(x) \simeq A/(y^2 - x^3, x) \simeq k[y]/(y^2)$ qui est de longueur 2. De même

$$\mathcal{O}_{C, P}/(y - x) \simeq A/(y^2 - x^3, y - x) \simeq k[y]_{(y)}/(y^2 - y^3) \simeq k[y]/(y^2)$$

de longueur 2 également. Finalement $\text{mult}_P(D) = \text{mult}_P(y - x) - \text{mult}_P(x) = 0$. Donc $D = 0$.

(3) (i) Ensemblistement (pas schématiquement !) Z est défini par $x = 0$. Il s'ensuit que $U = D(x)$. Notons $A = k[x, y, z]/(z^2 - xy)$, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A[1/x]$. Dans cet anneau $y = z^2/x$ d'où $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \simeq k[x, z, 1/x]$. C'est un anneau factoriel, donc $\text{Cl}(X) = 0$.

(ii) On a la suite exacte $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$ où la première flèche est définie par $1 \mapsto Z$. Comme $\text{Cl}(U) = 0$, cette flèche est surjective. Montrons maintenant que $2Z$ est le diviseur associé à la fonction $f = x \in A$. Cette fonction n'a pas de pôles ; elle ne peut avoir de zéro que le long d'un diviseur W défini par un idéal premier p_W contenant x . Le seul tel idéal premier est $p_W = (x, z)$, i.e. $W = Z$. Or

$$\mathcal{O}_{X, Z} \simeq \left(\frac{k[x, y, z]}{z^2 - xy} \right)_{(x, z)} \simeq k[y, z]_{(z)}$$

Cet anneau est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal engendré par z . On voit que la fonction $f = x = z^2/y$ a pour multiplicité 2. Ceci montre bien que $\text{div}(f) = 2Z$, donc la classe de $2Z$ est nulle dans $\text{Cl}(X)$.

(iii) Le fait que X est normal est l'objet (si k est de caractéristique différente de 2) d'un exercice assez facile de Hartshorne, cf chapitre II, paragraphe 6, exercice 6.4. (Ici, on l'admet.) Soit K le corps des fractions de $A = k[x, y, z]/(z^2 - xy)$. Supposons que Z est principal, i.e. est le diviseur associé à une fonction méromorphe $f \in K$. Comme $\text{div}(f) = Z \geq 0$, pour tout diviseur de Weil Z' , la fonction f n'a pas de pôle le long de Z' . En termes plus algébriques, pour tout idéal premier $p' \subset A$ de hauteur 1, on a $f \in A_{p'}$. Comme $A = \bigcap_{\text{ht}(p)=1} A_p$ il

en résulte que $f \in A$. Montrons maintenant que f engendre l'idéal premier $p = (x, z)$ de Z . En fait, si $g \in p$, on a $\text{div}(g) \geq Z$, donc $\text{div}(g/f) \geq 0$, et par le même raisonnement que précédemment on trouve $g/f \in A$. Donc $g \in (f)$, i.e. en fait $p = (f)$. Or il est facile de voir que l'idéal (x, z) ne peut pas être engendré par un élément, par exemple en localisant au point singulier puis en regardant dans l'espace tangent m/m^2 . En conclusion $Z \neq 0$ dans $Z^1(X)$.

(iv) Comme X est normal, le morphisme $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$ est injectif, de sorte que $\text{Div}(X) \hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il ne reste qu'à montrer que Z n'est pas un diviseur de Cartier, ce qui est clair, en regardant encore au voisinage du point singulier.

Corrigé ex. 2 D'abord, quelques commentaires. Il existe des conditions suffisantes d'existence de $\text{Pic}_{X/k}$ (on dit, de *représentabilité* du foncteur F) plus générales que celle de l'exercice. Un exemple : si X est une courbe projective et lisse de genre g , alors $\text{Pic}_{X/k}^0$ est sa *jacobienne*, qui est une variété abélienne de dimension g . On sait qu'une telle variété est propre (en fait, projective).

Passons à l'exercice proprement dit. Comme $\text{Pic}_{X/k}^0$ est de type fini, on peut vérifier la propriété à l'aide du critère valuatif de propriété. Il s'agit de montrer que si R est une k -algèbre qui est un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K , alors tout k -morphisme $u_K : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Pic}_{X/k}^0$ se prolonge de manière unique en un morphisme $u_R : \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Pic}_{X/k}^0$. Utilisant la définition de $\text{Pic}_{X/k}^0$, la donnée de u_K équivaut à la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}_K$ sur $X_K = X \times_k K$ (noter que $\text{Pic}(\text{Spec}(K)) = 0$). Comme X_K est un schéma régulier, en particulier localement factoriel, il existe un diviseur de Weil $D_K \subset X_K$ tel que $\mathcal{L}_K = \mathcal{O}_{X_K}(D_K)$. Notons D_R l'adhérence de D_K dans X . C'est un diviseur de Weil de X_R (ou un diviseur de Cartier, ici c'est la même chose) : en effet, il est irréductible comme adhérence d'une partie irréductible, et de dimension 1 car la codimension est la dimension de Krull de l'anneau local du point générique $\eta \in D_R$, qui se trouve dans D_K . On note ensuite $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{X_R}(D_R)$. C'est un faisceau inversible sur X_R , qui étend $\mathcal{L}_K$. Par la définition de $\text{Pic}_{X/k}^0$, on a donc un morphisme $u_R : \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Pic}_{X/k}$ qui en restriction à $\text{Spec}(K)$ n'est autre que u_K . Comme $\text{Spec}(R)$ est connexe, l'image de u_R tombe dans une composante connexe de $\text{Pic}_{X/k}$, donc dans $\text{Pic}_{X/k}^0$ puisque u_K tombe dedans. On a donc bien un morphisme $u_R : \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Pic}_{X/k}^0$ qui étend u_K .

Corrigé ex. 3 (1) $U_i \simeq \mathbb{A}_k^n$, et comme le groupe de Picard de l'espace affine est nul (car l'anneau de polynômes $k[x_0, \dots, x_n]$ est factoriel), il existe un isomorphisme $c_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$.

(2) L'anneau de fonctions de $U_i \cap U_j$ est $k \left[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j} \right]_{(0)}$, anneau des éléments de degré 0 dans $k[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}]$.

Ses unités sont donc les fractions rationnelles de degré 0 dont le numérateur et le dénominateur ont pour seuls facteurs x_i et x_j . D'où le résultat.

(3) Posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. On reprend les trivialisations $c_i : \mathcal{L}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}$ et on note les changements de cartes

$$\varphi_{ij} = (c_j|_{U_{ij}}) \circ (c_i|_{U_{ij}})^{-1} : \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_j|U_{ij}}.$$

On note qu'un tel isomorphisme est simplement donné par une section inversible de $\mathcal{O}_{U_{ij}}$, donc d'après la question (2) on a $\varphi_{ij} = \alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$. La condition de cocycle est la compatibilité $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ sur les intersections triples U_{ijk} , ce qui donne

$$\alpha_{ik}(x_i/x_k)^{l_{ik}} = \alpha_{jk}(x_j/x_k)^{l_{jk}}\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}} = \alpha_{jk}\alpha_{ij}(x_j/x_k)^{l_{jk}}(x_i/x_j)^{l_{ij}}.$$

L'égalité des degrés en x_i impose $l_{ik} = l_{ij}$ donc l_{ij} est indépendant de j . L'égalité des degrés en x_k impose $l_{ik} = l_{jk}$ donc l_{ij} est indépendant de i . Finalement $l_{ij} = l$ indépendant de i et j . Enfin, comme $H^1(\mathbb{P}_k^n, k^*) = 0$, il existe des constantes $\beta_i \in k^*$ telles que $\alpha_{ij} = \beta_i/\beta_j$. Alors on voit que si on pose $c'_i = c_i/\beta_i$ on a des changements de cartes $\varphi'_{ij} = \alpha_{ij}^{-1}\varphi_{ij} = (x_i/x_j)^{l_{ij}}$.

(4) Le faisceau inversible $\mathcal{O}(l)$ est celui qui est déterminé par les fonctions de transition $(x_i/x_j)^l$ sur $U_i \cap U_j$. L'application $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_k^n)$ donnée par $l \mapsto \mathcal{O}(l)$ envoie 0 sur $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$, et c'est un morphisme de groupes car il est facile de voir que quand on prend le produit tensoriel de faisceaux inversibles, les fonctions de transition se multiplient. On a montré dans les questions précédentes que ce morphisme est surjectif. Calculons son noyau. Si $l > 0$ le faisceau $\mathcal{O}(l)$ possède une section non constante définie par $s|_{U_i} = (x_0/x_i)^l$, donc $\mathcal{O}(l)$ n'est pas trivial.

(car les seules sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$ sont les constantes). Si $l < 0$ le faisceau $\mathcal{O}(-l)$ possède une section non constante, donc $\mathcal{O}(-l)$ n'est pas trivial. Donc $\mathcal{O}(l)$ trivial implique $l = 0$. En conséquence le morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_k^n)$ est injectif, donc un isomorphisme.

TD - Feuille 5

Corrigé ex. 1 (1) Une façon de décrire l'éclatement est comme image schématique de l'application graphe $\varphi : X \dashrightarrow X \times \mathbb{P}^n$ de l'application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ donné par les fonctions f_i , c'est-à-dire $x \mapsto [f_1(x) : \dots : f_n(x)]$. (Pour plus de détails sur images et adhérences schématiques, voir Liu, exercice 2.3.17. L'image schématique est l'adhérence schématique de l'image.) L'ensemble de définition de φ est la réunion des ouverts $D(f_i)$, c'est-à-dire, l'ouvert complémentaire du centre de l'éclatement.

Profitons de cette définition pour faire quelques commentaires sur les écritures utilisées. On sait que chaque $f_i \in A$ peut être vu comme un morphisme $X \rightarrow \mathbb{A}^1$, et le uplet $f_0, \dots, f_n$ comme un morphisme $X \rightarrow \mathbb{A}^{n+1}$. (En l'absence de précision, lorsqu'on écrit $\mathbb{A}^1$ il s'agit de la droite affine sur $\mathbb{Z}$, ou alors de la droite affine sur l'anneau R qui sert d'anneau de base dans le contexte de l'exercice. Dans cet exercice, aucun anneau de base n'est mentionné.) L'application φ est obtenue en composant avec l'application rationnelle $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ qui, lorsqu'on est sur un corps de base k , est le quotient par le groupe multiplicatif k^* . Plus précisément, choisissons des coordonnées $z_0, \dots, z_n$ sur $\mathbb{A}^n$, donc $\mathbb{A}^n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[z_0, \dots, z_n])$. Ces coordonnées induisent des coordonnées homogènes $x_0, \dots, x_n$ sur $\mathbb{P}^n$, telles que $\mathbb{P}^n = \text{Proj}(\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n])$ et que π est définie sur l'ouvert $\Omega = \cup_{i=0}^n D(z_i)$ par

$$\pi|_{D(z_i)} : D(z_i) \rightarrow D_+(x_i)$$

induit par le morphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \rightarrow \mathbb{Z}\left[z_0, \dots, z_n, \frac{1}{z_i}\right]$$

qui envoie x_k/x_i sur z_k/z_i . Une autre description de π en termes de la propriété universelle de $\mathbb{P}^n$ est qu'il y a sur Ω un faisceau inversible engendré par $n+1$ sections, c'est le sous-faisceau du faisceau des fonctions méromorphes $\mathcal{K}_\Omega$ qui sur $D(z_i) = \text{Spec}(\mathbb{Z}[z_0, \dots, z_n, 1/z_i])$ a pour générateur $1/z_i$. (On vérifie que les faisceaux $\mathcal{L}_i$ ainsi définis sur $D(z_i)$ se recollent en un faisceau sur Ω .) À ce faisceau inversible sur Ω engendré par $n+1$ sections correspond, par la propriété universelle de $\mathbb{P}^n$, un morphisme $\Omega \rightarrow \mathbb{P}^n$. On peut aussi dire directement qu'il y a sur l'ouvert $U = \cup_{i=0}^n D(f_i) \subset X = \text{Spec}(A)$ un faisceau inversible engendré par $n+1$ sections, ce faisceau étant le sous-faisceau du faisceau des fonctions méromorphes de X qui sur $D(f_i)$ est engendré par $1/f_i$. À ce faisceau inversible sur U engendré par $n+1$ sections correspond un morphisme $\psi : U \rightarrow \mathbb{P}^n$.

(2) La restriction de φ à $D(f_i)$ tombe dans l'ouvert affine $X \times U_i$, et dans ces cartes elle est donnée par le morphisme d'anneaux

$$u : A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \rightarrow A\left[\frac{1}{f_i}\right]$$

qui préserve les éléments de A et envoie x_k/x_i sur f_k/f_i . Il est clair que $(J : (f_i)^\infty) \subset \ker(u)$ puisque si $P = P(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i)$ et $f_i^n P \in J$ pour un certain entier $n \geq 1$, alors on voit immédiatement que $u(f_i^n P) = 0$, et comme f_i est inversible dans $A[1/f_i]$, on trouve $P \in \ker(u)$. C'est la réciproque qui est moins évidente. Soit $P = P(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) \in \ker(u)$. Il est clair que si n est plus grand que le degré total de P en les variables x_k/x_i , alors $f_i^n P$ est un polynôme en les variables $f_i x_k/x_i$, i.e. $f_i^n P(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) = Q(f_i x_0/x_i, \dots, f_i x_n/x_i)$. Dans $A[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]/J$ on a donc

$$f_i^n P(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) = Q(f_0, \dots, f_n) =: a$$

qui est un élément $a \in A$. Dire que $P \in \ker(u)$ implique que $a = 0$. Il s'ensuit que $f_i^n P(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i)$ est nul modulo J , donc $P \in (J : (f_i)^\infty)$.

(3) Ici $A = k[x, y]/(f)$ où $f = y^2 - x^2(x+1)$, et on éclate l'idéal $I = (x, y)$. L'éclatement $\tilde{X}$ est un sous-schéma fermé de $X \times \mathbb{P}^1$. Notons z_0, z_1 des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1$, $u = z_1/z_0$, $v = z_0/z_1$. On note aussi

$\mathcal{U}_0 = X \times U_0 = \text{Spec}(A[u])$ et $\mathcal{U}_1 = X \times U_1 = \text{Spec}(A[v])$, qui sont les ouverts standards de $X \times \mathbb{P}^1$ vu comme la droite affine $\mathbb{P}_A^1$ sur A . Il faut calculer les équations de $\tilde{X}$ dans $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$.

Regardons dans $\mathcal{U}_0$. Dans l'anneau quotient $A[u]/(y - ux)$ on a $(ux)^2 = x^2(x+1)$, donc l'élément $u^2 - (x+1)$ est de x -torsion. On a :

$$A[u]/(y - ux, u^2 - (x+1)) \simeq k[x, u]/(u^2 - (x+1)) \simeq k[u].$$

Cet anneau n'a pas de x -torsion, autrement dit $\tilde{X} \cap \mathcal{U}_0 \simeq \text{Spec}(k[u])$.

Regardons maintenant dans l'ouvert $\mathcal{U}_1$. Dans l'anneau quotient $A[v]/(x - vy)$ on a $y^2 = (vy)^2(vy+1)$, donc $1 - v^2(vy+1)$ est de y -torsion. On a :

$$A[v]/(x - vy, 1 - v^2(vy+1)) \simeq k[y, v]/(1 - v^2(vy+1)).$$

Cet anneau n'a pas de y -torsion, donc $\tilde{X} \cap \mathcal{U}_1 \simeq \text{Spec}(k[y, v]/(1 - v^2(vy+1)))$.

En fait, puisque la fonction v est inversible sur $\tilde{X} \cap \mathcal{U}_1$, on voit que $\tilde{X} \cap \mathcal{U}_1 \subset \tilde{X} \cap \mathcal{U}_0$. Donc finalement $\tilde{X} = \tilde{X} \cap \mathcal{U}_0$ est la droite affine de coordonnée u . On pouvait anticiper cela en observant que :

a) dans X on a $D(y) \subset D(x)$, donc l'ensemble de définition de l'application rationnelle graphe $X \dashrightarrow X \times \mathbb{P}^n$ est simplement $D(x)$,

b) l'image schématique de $D(x) \rightarrow X \times \mathcal{U}_0$ est fermée dans $X \times \mathbb{P}^1$, donc c'est l'image schématique dans $X \times \mathbb{P}^1$ i.e. c'est $\tilde{X}$. Précisément, en coordonnées homogènes z_0, z_1 c'est le sous-schéma fermé d'équations $z_0y - z_1x$ et $z_1^2 - z_0^2(x+1)$.

Corrigé ex. 2 (1) Soit $(u : v)$ des coordonnées dans $X = \mathbb{P}_R^1$. On utilisera le plongement de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ donné par $((u : v), (x : y)) \mapsto (a : b : c : d) = (ux : uy : vx : vy)$. L'équation de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$ est $ad = bc$. On peut supposer que le point qu'on éclate est défini dans la carte $v \neq 0$ par l'idéal $(u/v, \pi)$ donc le morphisme graphe qui définit l'éclatement est $X \rightarrow X \times \mathbb{P}^1$, $(u : v) \mapsto ((u : v), (x : y) = (u : \pi v))$. On voit que l'équation $\pi vx = uy$ donne $\pi c = b$ dans $\mathbb{P}^3$. Finalement les équations pour $\tilde{X}$ dans $\mathbb{P}^3$ sont $ad = bc$ et $\pi c = b$. Il s'agit de la conique $\{ad = \pi c^2\}$ du plan projectif $\mathbb{P}_R^2 = \text{Proj}(R[a, c, d])$.

(2) La fibre fermée a pour équation $ad = 0$, c'est une réunion de deux $\mathbb{P}^1$ se coupant en un point. Elle est singulière.

Corrigé ex. 3 On éclate la courbe en le point singulier $x = y = 0$. Lorsqu'on éclate, il y a deux cartes. Dans la première carte on pose $y = ux$ et on obtient l'équation $u^a x^{a-b} = 1$. Ici, il n'y a plus de singularité. Dans la deuxième carte, on pose $x = vy$ et on obtient l'équation $y^{a-b} = v^b$. Ici, il y a encore une singularité et on se concentre dans la suite sur cette seule carte. On voit qu'en itérant, dans la seule carte intéressante, l'exposant de y décroît de b unités à chaque étape. Si on fait la division euclidienne $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, après q éclatements l'exposant $a - qb = r$ est strictement inférieur à b . Ensuite, la carte intéressante est celle qui n'était pas intéressante avant. Par ailleurs, on voit qu'on peut éviter ces q éclatements en éclatant dès le départ le sous-schéma non réduit d'idéal (x, y^q) au lieu d'éclater le point singulier réduit. En effet, si l'on fait cela, dans la première carte on pose $y^q = ux$ et on obtient l'équation $u^b y^r = 1$, il n'y a plus de singularité. Dans la deuxième carte, on pose $x = vy^q$ et on obtient l'équation $y^r = v^b$. On recommence alors en faisant la division euclidienne de b par r , etc. En résumé, il s'agit d'appliquer l'algorithme d'Euclide du calcul du pgcd, de la manière suivante :

- 1) Faire $A := a$, $B := b$, et $A = BQ + R$ avec $0 \leq R < B$ (division euclidienne de A par B).
- 2) Éclater l'idéal $I = (x, y^Q)$ dans la courbe d'équation $y^A = x^B$.
- 3) Tant que $R \geq 2$, une singularité $y^R = v^B$ persiste (dans la carte telle que $x = vy^Q$). Faire $A := B$, $B := R$ et retourner en 2).

Corrigé ex. 4 On doit noter tout d'abord que la loi d'addition de E_K est décrite par des expressions rationnelles, c'est-à-dire valables sur un ouvert $U \subset E_K$, mais on sait qu'elle s'étend en une loi sur E_K . De même, on sait qu'une application rationnelle non constante entre deux courbes projectives lisses s'étend de manière unique en un morphisme, bien défini partout, c'est pourquoi on peut se permettre de décrire un tel morphisme de manière

rationnelle. En revanche, lorsque les courbes ne sont pas propres, ou pas lisses, ou qu'il s'agit de courbes sur R (de dimension 2, donc des surfaces), les choses ne sont plus aussi simples. Pour définir des morphismes, il est alors important d'écrire des expressions « sans pôles » en tout point.

(1) Si la loi de groupe s'étendait à E , alors la fibre spéciale E_k serait munie d'une loi de groupe. Comme E_k est géométriquement réduite, elle devrait être lisse, comme tout groupe algébrique, ce qui n'est pas le cas puisque le point $x = y = 0$ est singulier. Donc la loi de groupe de E_K ne s'étend pas à E .

(2) Un point $P \in E(K)$ est de 2-torsion si et seulement si $2P = 0$, ou encore $-P = P$. Le point origine $P = O$ est de 2-torsion, considérons maintenant les points $P \neq O$. Si $P = (x, y)$, on a $-P = (x, -y)$, donc les points de 2-torsion non triviaux sont ceux pour lesquels $y = 0$ (noter que comme la caractéristique de k est différente de 2, celle de K aussi). On trouve que x vaut 0, 1 ou λ et donc les points de 2-torsion sont :

$$O = \infty \quad , \quad A = (0, 0) \quad , \quad B = (\lambda, 0) \quad , \quad C = (1, 0) \quad .$$

Ainsi tous les points de 2-torsion sont rationnels et $G = E_K[2] \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(3) Soit $P = (x, y)$, l'expression de $\tau(P) = P + A$ en coordonnées non homogènes est :

$$\begin{cases} x' = (y/x)^2 - x + \lambda + 1 \\ y' = -(y/x)x' = -(y/x)((y/x)^2 - x + \lambda + 1) . \end{cases}$$

Il s'agit d'exprimer τ en coordonnées homogènes, et de voir si on peut l'étendre à E tout entière. Notons que E est un schéma normal : c'est clair partout sauf peut-être au point singulier de la fibre spéciale, mais en ce point, on peut voir que l'anneau local est encore normal, soit par un calcul direct, soit en utilisant le fait que E est plate sur R , à fibre générique normale (car lisse) et à fibre spéciale réduite, voir Liu, lemme 4.1.18. On sait que les schémas normaux ont la propriété que leurs fonctions rationnelles définies en codimension ≤ 1 sont définies partout. Cependant, il n'est pas vrai que si X est normal, toute application rationnelle $X \dashrightarrow Y$ définie en codimension ≤ 1 s'étend en un morphisme $X \rightarrow Y$ (les fonctions sur X correspondent au cas particulier $Y = \mathbb{A}^1$). À ce sujet, lire Liu, theorem 4.1.14 et proposition 4.1.16.

L'équation homogène de E est $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$. Pour passer en coordonnées homogènes, on chasse les dénominateurs dans les composantes du point image $(x' : y' : 1)$, et pour cela on multiplie par x^3z . Pour x' , cela fait apparaître

$$x(y^2z - x^3 + (\lambda + 1)x^2z)$$

qui vaut λx^2z^2 . Finalement,

$$\tau(x : y : z) = (\lambda x^2z^2 : -\lambda xyz^2 : x^3z) = (\lambda xz : -\lambda yz : x^2) .$$

Cette expression a un sens au moins sur l'ouvert $U = \{x \neq 0\}$, essayons de l'étendre. On peut réécrire l'équation de E en $(y^2 + (1 + \lambda)x^2 - \lambda xz)z = x^3$, donc on a

$$\tau(x : y : z) = (\lambda x^2z : -\lambda xyz : x^3) = (\lambda x^2 : -\lambda xy : y^2 + (1 + \lambda)x^2 - \lambda xz) .$$

Cette expression a un sens au moins sur l'ouvert $V = \{y^2 + (1 + \lambda)x^2 - \lambda xz \neq 0\}$. Il ne reste qu'un point qui n'est ni dans E_K , ni dans U , ni dans V , c'est le point de la fibre spéciale de coordonnées $x = y = 0$ et $z = 1$, notons-le Q . J'affirme que τ ne peut pas s'étendre sur un voisinage de Q . En effet, si c'était le cas, comme τ envoie $E_k \setminus \{Q\}$ sur Q , alors par continuité on doit avoir $\tau(Q) = Q$. Soit $m_Q = (\lambda, x, y)$ l'idéal maximal de Q et

$$\mathcal{O}_{E,Q} = \left(\frac{R[x, y]}{y^2 - x(x-1)(x-\lambda)} \right)_{m_Q}$$

l'anneau local de Q dans E . Alors τ induit un morphisme $\tau^\sharp : \mathcal{O}_{E,Q} \rightarrow \mathcal{O}_{E,Q}$, ce morphisme est connu sur les corps de fractions et l'on a

$$\tau^\sharp(x) = (y/x)^2 - x + \lambda + 1 \quad , \quad \tau^\sharp(y) = -(y/x)((y/x)^2 - x + \lambda + 1) .$$

Comme $(y/x)^2 - x + \lambda + 1 = \lambda/x \notin \mathcal{O}_{E,Q}$, on a une contradiction.

En conclusion τ ne s'étend pas en un morphisme $E \rightarrow E$. On note, au passage, que la restriction de τ à $E_k \setminus \{q\}$ s'étend en un morphisme $E_k \rightarrow E_k$, à savoir le morphisme constant de valeur q . Donc lorsqu'on part d'une application rationnelle f définie sur un schéma X/R , dont l'ensemble de définition intersecte toute les fibres, ce n'est pas la même chose d'étendre f en un morphisme, ou d'étendre en des morphismes les restrictions de f fibre à fibre.

(4) ... Je vous le laisse ! (Je pense qu'un éclatement suffit pour pouvoir étendre τ à $\tilde{E}$, mais je ne suis pas sûr.)