

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 10 novembre 2015

4.5 Modules cohérents

Nous introduisons maintenant des conditions de finitude sur les $\mathcal{O}_X$ -modules, naturelles en géométrie algébrique.

4.5.1 Définition. Soit X un espace annelé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module est *de type fini* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U sur lequel $\mathcal{F}|_U$ peut être engendré par un nombre fini de sections, i.e. il existe une suite exacte $\mathcal{O}_U^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$.

4.5.2 Remarques. (1) Un $\mathcal{O}_X$ -module de type fini n'est pas nécessairement quasi-cohérent. Voici un contre-exemple. Prenons pour X le spectre d'un anneau de valuation discrète comme $R = k[t]_{(t)}$ (k un corps) ou $R = \mathbb{Z}_p$ (p un nombre premier). Alors X est composé de deux points, un point fermé et le point générique η qui forme un ouvert $U = \{\eta\}$. Le corollaire 4.2.6 montre que le faisceau d'idéaux défini par $\mathcal{I}(X) = 0$ et $\mathcal{I}(U) = \mathcal{O}_X(U) = \text{Frac}(R)$ n'est pas quasi-cohérent. Il en découle que le faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ n'est pas quasi-cohérent, alors qu'il est de type fini, localement engendré par une section.

(2) Lorsque X n'est pas localement noethérien, un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$ est en général défini (localement) à l'aide d'une infinité de relations ; plus précisément, localement sur un ouvert U sur lequel on dispose d'une surjection $s : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}|_U$, le noyau de s n'est pas nécessairement de type fini. Si $X = \text{Spec}(A)$ et I est un idéal qui n'est pas de type fini, le faisceau $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ avec $M = A/I$ est un tel exemple.

Les $\mathcal{O}_X$ -modules qui nous intéressent le plus sont ceux qui ne présentent pas la pathologie de la remarque (2). Ils sont nommés *cohérents*. Leur définition est conçue pour que la catégorie qu'ils forment possède de bonnes propriétés de stabilité. (Noter à ce propos que la définition de [Har], chap. II, § 5, n'est pas correcte.)

4.5.3 Définition. Soit X un espace annelé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module est *cohérent* s'il est de type fini et si pour tout ouvert U , tout entier n et tout morphisme $u : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{F}|_U$, le noyau de u est de type fini. On note $\text{Coh}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents.

La proposition suivante signale que dans le cas d'un schéma affine, spectre d'un anneau noethérien, les $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents correspondent aux modules de type fini sur l'anneau.

4.5.4 Proposition. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine noethérien. Les foncteurs

$$\text{Mod}^{tf}(A) \xrightleftharpoons[\Gamma]{M \mapsto \widetilde{M}} \text{Coh}(\mathcal{O}_X)$$

sont des équivalences exactes, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des A -modules de type fini (aussi appelés A -modules finis) et la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents.

Démonstration : Si A est noethérien, alors l'anneau de fonctions B de tout ouvert de X est noethérien (2.4.5 et 2.4.2). De plus, tout sous-module de B^n est de type fini. Ceci démontre que pour tout A -module de type fini M , le faisceau $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ est cohérent. Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est cohérent, prenant $U = X$ dans la définition on voit que le A -module $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ est de type fini. $\square$

Pour terminer cette brève présentation des modules cohérents, nous allons montrer comment le lemme de Nakayama se reformule géométriquement comme une propriété de leurs fibres (voir l'exercice 4.1.3 pour des rappels sur les fibres).

4.5.5 Proposition. *Soit X un schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Alors, les fibres $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ sont des $\kappa(x)$ -espaces vectoriels de dimension finie. De plus, la fonction $X \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_{\kappa(x)} \mathcal{F}(x)$ est semi-continue supérieure, ce qui signifie que pour tout entier n l'ensemble $\{x \in X; \dim \mathcal{F}(x) \leq n\}$ est ouvert dans X .*

Démonstration : Toutes les propriétés énoncées sont locales. Il suffit de les démontrer sur un ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$. Soit $x = [p]$ un point. Alors $\mathcal{F}|_U$ est le faisceau associé au module $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$ qui est un A -module fini, et $\mathcal{F}(x) \simeq M(p) := M \otimes_A \kappa(p)$. Si $x_1, \dots, x_r$ sont des générateurs de M , alors leurs images dans $M(p)$ l'engendrent donc $\dim_{\kappa(x)} \mathcal{F}(x) = \dim_{\kappa(p)} M(p) \leq r$. Montrons maintenant la propriété de semi-continuité. Soit $x = [p] \in U$ tel que $\dim \mathcal{F}(x) \leq n$. Ceci signifie que $M(p)$ peut être engendré par des éléments $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ en nombre $r \leq n$. Comme $\kappa(p) = \text{Frac}(A/p)$, quitte à chasser les dénominateurs on peut supposer que $\bar{x}_i \in M \otimes_A A/p = M/pM$ et on peut choisir un représentant $x_i \in M$. Soit $u : A^r \rightarrow M$ le morphisme de A -modules qui envoie le i -ième vecteur de base canonique $e_i \in A^r$ sur x_i . Le conoyau $C = \text{coker}(u)$ est un A -module fini et son localisé C_p est A_p -module fini. Comme la formation du conoyau commute au produit tensoriel $- \otimes_A \kappa(p)$ (exactitude à droite du produit tensoriel, cf [Mat], Appendix A, formula 8, ou [Ei], prop. A.2.1) et que les $\bar{x}_i$ engendrent $M(p)$, on a :

$$C_p/pC_p = C_p \otimes_{A_p} \kappa(p) = C \otimes_A \kappa(p) = 0.$$

Ceci signifie que $C_p = pC_p$. D'après le lemme de Nakayama ([Mat], th. 2.2) il en découle que $C_p = 0$. Comme C est de type fini, on déduit qu'il existe $f \notin p$ tel que $fC = 0$. En conséquence $C \otimes A[1/f] = 0$, donc le $\mathcal{O}_U$ -module $\widetilde{C}$ s'annule en restriction à l'ouvert $V = D(f)$. Ainsi $\widetilde{u}|_V : \mathcal{O}_V^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{F}|_V$ est surjectif et ceci montre que $\{x \in X; \dim \mathcal{F}(x) \leq n\}$ est ouvert. $\square$

Nous avons évoqué plus haut les propriétés de stabilité de la catégorie $\text{Coh}(\mathcal{O}_X)$. La plus importante d'entre elles est la stabilité par images directes pour un morphisme propre $f : X \rightarrow Y$ ayant une base Y localement noethérienne. Nous en reparlerons lorsque nous définirons les morphismes propres.

4.6 Faisceaux inversibles

4.6.1 Définition. Soit X un espace annelé et r un entier. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est *localement libre de rang r* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i et des isomorphismes $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est *inversible* s'il est localement libre de rang 1. Le $\mathcal{O}_X$ -module localement libre $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ est appelé *trivial* et on dit qu'un ouvert U_i comme ci-dessus *trivialise* $\mathcal{F}$.

On notera qu'il existe une notion de $\mathcal{O}_X$ -module localement libre dont le rang r est une fonction seulement localement constante sur X .

Nous avons vu en 4.1 les notions générales de produit tensoriel et de faisceau $\mathcal{H}om$ pour les $\mathcal{O}_X$ -modules. Nous ajoutons la définition du $\mathcal{O}_X$ -module *dual* : il s'agit du faisceau $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. On dispose d'un morphisme $\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ qui envoie une section locale $\varphi \otimes s$ de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U , sur le morphisme $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ défini par $x \mapsto \varphi(x)s$. On dispose aussi d'un morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ qui envoie une section locale de $\mathcal{O}_X$ sur la multiplication scalaire par cette section.

4.6.2 Lemme. *Soient X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 1. Alors, les morphismes canoniques introduits ci-dessus sont des isomorphismes :*

$$\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_X.$$

Démonstration : Il suffit de montrer que les morphismes donnés sont des isomorphismes sur un recouvrement ouvert de X . Soit U un ouvert qui trivialise $\mathcal{L}$. Après le choix d'un isomorphisme $u : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U$ et de l'isomorphisme $(u^\vee)^{-1} : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U^\vee$ obtenu en dualisant, les isomorphismes se réduisent aux identifications $\mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_U$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U$. $\square$

On a donc $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$, ce qui explique la terminologie introduite dans la définition suivante.

4.6.3 Définition. Un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{L}$ est appelé *faisceau inversible* s'il est localement libre de rang 1. Son *inverse* ou *dual* est le faisceau $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Le faisceau inversible trivial est le faisceau $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Le *groupe de Picard* de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X , pointé par la classe d'isomorphisme du faisceau inversible trivial et muni de l'opération de produit tensoriel. Il est noté $\text{Pic}(X)$.

4.6.4 Remarque. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés, l'image inverse induit un morphisme de groupes $f^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$. En revanche, en général l'image directe $f_*\mathcal{L}$ d'un faisceau inversible n'est pas un faisceau inversible. Par exemple, pour un schéma X sur un corps k , l'image directe de $\mathcal{O}_X$ par $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ est l'espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ qui est de dimension > 1 en général.

4.6.5 Définition. Soient X un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, et $(s_i)_{i \in I}$ une famille de sections globales de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *engendré par les s_i* si le morphisme naturel $\varphi : \mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$, $\varphi(U)((a_i)_{i \in I}) = \sum a_i s_i|_U$ est surjectif.

4.6.6 Exemple (retour sur l'espace projectif). Soit $P = \mathbb{P}_S^n$ l'espace projectif sur S . Supposons que $S = \text{Spec}(A)$ pour simplifier les notations ; toutes les constructions qui suivent fonctionnent pareil en travaillant avec le faisceau $\mathcal{O}_S$ plutôt qu'avec l'anneau A . Soient $A_i = A[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i]$ et $A_{i,j} = A_i[t_i/t_j] = A_j[\widetilde{t_j/t_i}] = A_{j,i}$. Fixons un entier d . Sur l'ouvert $P_i = \text{Spec}(A_i)$, on définit un faisceau inversible $\mathcal{F}_i = \widetilde{M_i}$ en posant $M_i = (t_i)^d A_i$, sous- A_i -module de $K = A[t_0, \dots, t_n, (t_0 \dots t_n)^{-1}]$. Si l'on affecte chaque t_i du poids 1, on voit que M_i est composé des éléments homogènes de degré d dans $A[t_0, \dots, t_n, (t_i)^{-1}]$. Sur les intersections $P_{i,j}$, on dispose d'isomorphismes $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_i|_{P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{P_{i,j}}$ donnés par la multiplication par $(t_j/t_i)^d$:

$$\begin{aligned} M_i &\longrightarrow M_j \\ x = (t_i)^d a &\longmapsto \left(\frac{t_j}{t_i}\right)^d x = (t_j)^d a. \end{aligned}$$

Les conditions de recollement sont satisfaites par les $\varphi_{i,j}$ (tout se vérifie dans K où c'est clair). On note $\mathcal{O}(d)$ le faisceau inversible obtenu en recollant les $\mathcal{F}_i$ le long des $\varphi_{i,j}$. En particulier $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_P$. Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est appelé *faisceau tordu de Serre*. On a les faits suivants :

- (1) $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(n+m)$ i.e. l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(P)$, $n \mapsto [\mathcal{O}(n)]$ est un morphisme de groupes.
- (2) $\Gamma(P, \mathcal{O}(d)) \simeq \begin{cases} A[t_0, \dots, t_n]_d, & \text{le module des polynômes homogènes de degré } d \text{ si } d \geq 0, \\ 0 & \text{si } d < 0. \end{cases}$

En particulier, le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ est engendré par les sections $t_0, \dots, t_n$ puisque t_i engendre $\mathcal{O}(1)|_{P_i}$. On obtient donc un morphisme surjectif :

$$\phi : \mathcal{O}_P^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}(1).$$

On notera que, de même que l'espace affine $\mathbb{A}_S^n$ vient par construction avec des coordonnées canoniques $(t_1, \dots, t_n)$, l'espace projectif $\mathbb{P}_S^n$ vient avec un *système de coordonnées homogènes canonique* qui est un uplet $(t_0, \dots, t_n)$ à multiplication scalaire par $\Gamma(\mathbb{P}_S^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n})^\times$ près. Or si on change les coordonnées homogènes t_i en $u_i = \lambda t_i$ pour un $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$, le morphisme ϕ est multiplié par λ . C'est pourquoi dans la propriété universelle ci-dessous, c'est la classe de ϕ modulo les scalaires inversibles qui apparaît.

4.6.7 Théorème. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ un morphisme de S -schémas. Alors $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ est un faisceau inversible sur X et $\psi = f^*\phi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$ -modules. De plus, l'application $f \mapsto (\mathcal{L}, \psi)$ induit une bijection fonctorielle en X :*

$$\text{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}, \psi) \text{ avec } \mathcal{L} \text{ faisceau inversible sur } X \text{ et} \\ \psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{L} \text{ surjection de } \mathcal{O}_X\text{-modules} \end{array} \right\} / \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times.$$

Démonstration : nous nous contenterons de montrer comment on construit une application en sens inverse, et renverrons à [EH], III.2.5 ou [GW], 13.33 pour une preuve complète. Soit $(\mathcal{L}, \psi)$ un couple composé d'un faisceau inversible sur X et d'une surjection $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$. Soit s_i l'image par ψ du i -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. Notons $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ et pour chaque i posons

$$X_i = \{x \in X, (s_i)_x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(x)\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points x tels que s_i est un générateur de $\mathcal{L}(x)$, et aussi de $\mathcal{L}_x$, et donc (par Nakayama) de $\mathcal{L}|_U$ sur un petit voisinage ouvert U de x . On montre que X_i est un ouvert, et le fait que les sections s_i engendrent $\mathcal{L}$ montre que les X_i recouvrent X . De plus, pour tous $j \neq i$, sur tout ouvert $U \subset X_i$ sur lequel $\mathcal{L}$ est trivial, on peut écrire $s_j = f_{i,j,U} s_i$ pour une certaine fonction $f_{i,j,U} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Cette fonction est uniquement déterminée ; les $f_{i,j,U}$ se recollent en une fonction $f_{i,j}$ sur X_i . L'application $\mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ qui envoie t_j/t_i sur $f_{i,j}$ définit un morphisme $f_i : U_i \rightarrow X_i$ où U_i est le i -ième ouvert standard de $\mathbb{P}_S^n$. Les morphismes f_i se recollent en $f_\mathbb{Z} : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ qui détermine à son tour un unique S -morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$. $\square$

Proposons une petite reformulation de la propriété universelle. La première phrase du théorème implique que pour tout morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$, le faisceau $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ est inversible et engendré par les sections $s_i = f^*t_i$ pour $i = 0, \dots, n$. De plus, si les t_i sont multipliées simultanément par une fonction inversible $\lambda \in \Gamma(\mathbb{P}_S^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n})^\times$, alors les s_i sont multipliées simultanément par la fonction

inversible $f^\#(\lambda) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$. Ceci démontre que la classe $\underline{s} = (s_0 : \dots : s_n)$ pour la relation induite par la multiplication scalaire diagonale par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$, ne dépend que de la classe $\underline{t} = (t_0 : \dots : t_n)$, c'est-à-dire du système de coordonnées homogènes canonique. Il est naturel d'appeler un couple $(\mathcal{L}, \underline{s})$ composé d'un faisceau inversible et d'un uplet de sections globales qui l'engendrent, à multiplication par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ près, un *système de fonctions homogènes sur X* . Alors, le théorème se réécrit comme une bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \{ \text{systèmes } (\mathcal{L}, \underline{s}) \text{ de } n+1 \text{ fonctions homogènes sur } X \}.$$

Un système de fonctions homogènes sur X ne mérite le nom de *coordonnées* que s'il permet de repérer les points de manière aussi précise que ce qu'on attend habituellement de coordonnées. C'est le cas notamment lorsque le morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ déterminé par $(\mathcal{L}, \underline{s})$ est une immersion. En géométrie algébrique projective, l'une des principales tâches est justement de trouver quand cette situation favorable se produit.

4.6.8 Remarque. Il est instructif de décrire le cas particulier des morphismes $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ lorsque X est un schéma local, car il est très proche de la description classique des points de l'espace projectif. Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, un morphisme surjectif $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ est déterminé par un morphisme surjectif de A -modules $A^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$. Celui-ci est à son tour déterminé par les $n+1$ images $\ell_0, \dots, \ell_n$ des éléments de la base canonique de $A^{\oplus n+1}$. Si de plus A est un anneau local, alors le seul ouvert de X contenant le point fermé est X lui-même, si bien que tout faisceau inversible est trivial. On a donc un isomorphisme $\Gamma(X, \mathcal{L}) \simeq A$ et notant t un générateur de $\Gamma(X, \mathcal{L})$, on peut écrire $\ell_i = a_i t$ avec $a_i \in A$. On observe que la classe $(a_0 : \dots : a_n)$ pour l'homothétie par $A^\times$ ne dépend pas du choix du générateur. Enfin, le fait que ψ soit surjectif signifie qu'au moins un des a_i est inversible, donc les points de $\mathbb{P}_S^n$ à valeurs dans A sont en bijection avec les « coordonnées homogènes » usuelles $(a_0 : \dots : a_n)$, qui sont des uplets avec au moins un a_i inversible à homothétie près.

4.6.9 Exercice. (devrait figurer dans 4.1) Démontrez les faits suivants. Soient X un schéma et $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ des $\mathcal{O}_X$ -modules.

(1) (Adjonction $(\otimes, \mathrm{Hom})$) Il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

(2) (Dual et Hom) Il existe un morphisme canonique $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui est un isomorphisme si $\mathcal{F}$ est localement libre de rang fini.

(3) Il existe un morphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})$ qui est un isomorphisme si $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{H}$ est localement libre de rang fini.

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module et $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ des $\mathcal{O}_Y$ -modules.

(4) (Formule de projection) Il existe un morphisme canonique $f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{G})$. Si $\mathcal{G}$ est localement libre, ce morphisme est un isomorphisme.

(5) (f^* et Hom) Il existe un morphisme canonique $f^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^* \mathcal{G}, f^* \mathcal{H})$ qui est un isomorphisme si $\mathcal{G}$ est localement libre de rang fini.

(6) (f^* et dual, cas particulier de (5) où $\mathcal{H} = \mathcal{O}_Y$.) Il existe un morphisme canonique $f^*(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow (f^* \mathcal{G})^\vee$ qui est un isomorphisme si $\mathcal{G}$ est localement libre de rang fini.

5 Morphismes

Dans cette section, nous définissons quelques grandes classes de morphismes de schémas reliées principalement à des propriétés de séparation, finitude et compacité. Pour des raisons de temps et de place, nous ne développerons pas l'étude des propriétés de régularité (platitude, lissité, non ramification, caractère étale). Avant de commencer, faisons deux remarques générales.

La première remarque concerne le lien avec le point de vue relatif, mis en avant par Grothendieck et aperçu lors de l'étude des produits fibrés et des exemples de schémas arithmétiques comme la famille de coniques 3.5.3. Son principe est de mettre l'accent sur les objets sur une base S , c'est-à-dire les morphismes $X \rightarrow S$, plutôt que sur les schémas individuels. La logique et le développement harmonieux de ce point de vue nécessitent de développer des analogues relatifs de certaines notions absolues des schémas (comme le caractère affine, la quasi-compacité...). Une règle simple sera vérifiée : un schéma X possèdera une propriété « absolue » si et seulement si le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ possède la propriété « relative » correspondante.

La seconde remarque concerne les qualités de stabilité, ou de permanence, des différentes propriétés des morphismes. Nous donnons quatre exemples. Soit P une propriété que peut avoir ou non un morphisme de schémas.

- On dit que P est *stable par composition* si pour tout couple de morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow S$ qui possèdent P , la composée $g \circ f : X \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par changement de base* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ possède P (ici $X' := X \times_S S'$ et f' est la projection).
- On dit que P est *stable par localisation à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $X_i \subset X$, le morphisme $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P . On dit que P est *locale à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{X_i\}$ de X , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par localisation au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $S_i \subset S$, le morphisme $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P . On dit que P est *locale au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{S_i\}$ de S , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P .

Pour chacune des propriétés introduites dans cette section, on peut se poser la question de savoir si elle est stable par composition, changement de base, localisation à la source ou au but. Nous donnerons parfois un énoncé explicite, et parfois un énoncé sous forme d'exercice. Parfois aussi nous omettrons de poser la question, et la lectrice pourra se la poser pour elle-même.

5.1 Morphismes séparés

On peut consulter la page [https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_\(topologie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_(topologie)) pour un rappel sur les différents axiomes de séparation. Rappelons quelques propriétés d'un espace topologique séparé (*Hausdorff space* en anglais). Elles sont toutes équivalentes et peuvent servir de définition de la notion de séparation :

- (i) pour tous points distincts $x, y \in X$ il existe des voisinages ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$,

- (ii) la diagonale Δ_X est fermée dans $X \times X$,
- (iii) pour tout espace topologique Y et toute application continue $f : Y \rightarrow X$, le graphe $\Gamma_f = \{(y, f(y)); y \in Y\}$ est fermé dans $X \times Y$,
- (iv) pour tout espace topologique Y et toute paire d'applications continues $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = \{y \in Y; f(y) = g(y)\}$ est fermé dans Y .

La propriété (i) est la plus familière; c'est l'axiome T_2 . La démonstration du fait qu'elle est équivalente aux trois autres utilise le fait que la topologie sur $X \times X$ est la topologie produit, avec pour base d'ouverts les produits $U \times V$ d'ouverts de X . Ceci n'a pas lieu dans le monde des variétés algébriques ou des schémas (dans le plan $\mathbb{A}_k^2$, l'ouvert complémentaire d'une courbe qui n'est ni horizontale ni verticale ne contient aucun ouvert produit non trivial). En conséquence, la caractérisation (i) de la séparation est pratiquement inutile pour les schémas. En revanche les autres caractérisations sont pertinentes; nous utiliserons (ii).

5.1.1 Lemme. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ la diagonale. Alors $\Delta_{X/S}$ est :*

- (1) *une immersion;*
- (2) *une immersion fermée si X et S sont affines.*

Démonstration : Démontrons d'abord (2). Si $X = \text{Spec}(A)$ et $S = \text{Spec}(R)$, la diagonale est déterminée par le morphisme d'anneaux $A \otimes_R A \rightarrow A$ qui envoie $a \otimes 1$ sur a et $1 \otimes a'$ sur a' . C'est le morphisme de multiplication, qui est surjectif. Passons à (1). Soit $x \in X$. Soit U un voisinage ouvert affine de $f(x)$ et V un voisinage ouvert affine de x inclus dans $f^{-1}(U)$. Clairement l'image de la diagonale est incluse dans les ouverts de la forme $V \times_U V$. De plus $\Delta_{X/S|V} : V \rightarrow V \times_U V$ est une immersion fermée d'après le cas (2). Ceci conclut. $\square$

5.1.2 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *séparé* si la diagonale relative $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée. On dit aussi que X est un S -schéma séparé.

5.1.3 Proposition. *Les morphismes séparés sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. $\square$

5.1.4 Exercice. (Devrait figurer dans la section sur les immersions) (1) Dans un espace topologique X , soit Z une partie localement fermée i.e. une partie qui est intersection d'un ouvert et d'un fermé. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires composées d'un fermé F et d'un ouvert U tels que $Z = F \cap U$.

- (i) Montrez que l'adhérence $F_{\min} = \overline{Z}$ est le plus petit fermé F qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (ii) Montrez que la frontière $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ est fermée dans X et que $U_{\max} = X \setminus \partial Z$ est le plus grand ouvert U qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (iii) Montrez que pour tout $(F, U) \in \mathcal{E}$ on a $Z = F \cap U = F_{\min} \cap U = F \cap U_{\max}$. En particulier $(F_{\min}, U_{\max})$ appartient à $\mathcal{E}$.

(2) Soit $Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma et $f : Z \rightarrow X$ le morphisme d'immersion. Soit $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ et $U = X \setminus \partial Z$. Montrez que Z est un sous-schéma fermé de U . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) f est une immersion fermée, (ii) $U = X$, (iii) $|Z|$ est fermé dans $|X|$.

Table des matières

1	Définition des schémas	2
1.1	Pourquoi les schémas	2
1.2	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	4
1.3	L'espace topologique d'un schéma affine	4
1.4	Interlude 1 : catégories et foncteurs	6
1.5	Interlude 2 : faisceaux	9
1.6	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	13
1.7	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	14
1.8	Définition des schémas et des morphismes de schémas	17
2	Premières propriétés, premières constructions	19
2.1	Recollement	19
2.2	Sous-schémas	22
2.3	Fermés irréductibles et points	25
2.4	Schémas noethériens	28
2.5	Schémas réduits et intègres	30
2.6	Produits fibrés	31
3	Exemples de schémas	35
3.1	Variétés classiques	35
3.2	Schémas sur un corps non algébriquement clos	36
3.3	Schémas locaux	40
3.4	Schémas non réduits	43
3.5	Schémas arithmétiques [Cette section sera vue plus tard si le temps le permet]	45
4	Modules sur les schémas	46
4.1	Modules sur les espaces annelés	46
4.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas	48
4.3	Algèbres quasi-cohérentes et spectre relatif	52
4.4	Idéaux quasi-cohérents et sous-schémas fermés	53
4.5	Modules cohérents	55
4.6	Faisceaux inversibles	56
5	Morphismes	60
5.1	Morphismes séparés	60