

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 22 novembre 2016

5.5 Schémas sur un corps non algébriquement clos

Nous allons donner des exemples de schémas sur un corps k qui illustrent trois caractéristiques de la situation où k possède une arithmétique intéressante, c'est-à-dire n'est pas algébriquement clos :

- la présence ou non de points rationnels,
- la possibilité que le schéma soit défini sur un certain sous-corps,
- le fait que certaines propriétés soient perdues par changement de base à une clôture algébrique, et la nécessité de considérer les propriétés *géométriques*.

On fixe donc un corps k . Tout k -schéma X est muni d'un morphisme $X \rightarrow \operatorname{Spec}(k)$ appelé « morphisme de structure ». Les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ de fonctions régulières sur des ouverts, les anneaux locaux et les corps résiduels de points $x \in X$ sont des k -algèbres.

Un point rationnel du sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^n$ défini par des polynômes en n variables $f_1, \dots, f_r$ doit correspondre à une solution $a = (a_1, \dots, a_r)$ dans k^r du système $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si on pose $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$, une telle solution détermine un unique morphisme de k -algèbres $A \rightarrow k$ c'est-à-dire un unique morphisme $\operatorname{Spec}(k) \rightarrow X = \operatorname{Spec}(A)$. Si on veut considérer aussi les solutions $a \in l^r$ pour des extensions l/k , on est amené à la définition suivante.

5.5.1 Définition. Soit l/k une extension de corps. Un *point l -rationnel*, ou *l -point*, ou *point à valeurs dans l* , est un morphisme de k -schémas $\operatorname{Spec}(l) \rightarrow X$. On dit parfois *point rationnel* au lieu de *point k -rationnel*. On note $X(l) = \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Spec}(l), X)$ l'ensemble des points l -rationnels de X .

5.5.2 Remarques. (1) Sur un corps algébriquement clos, cette notation est cohérente avec les notations $\mathbb{A}^n(k)$ et $\mathbb{P}^n(k)$ que nous avons utilisées pour désigner l'espace affine et l'espace projectif en tant que variétés algébriques classiques, qui sont les ensembles de points k -rationnels des schémas $\mathbb{A}_k^n$ et $\mathbb{P}_k^n$. (Et la notation évidemment redondante $\mathbb{A}_k^n(k)$ est simplifiée en $\mathbb{A}^n(k)$.)

(2) Pour toute extension de corps l/k , notons $X_l = X \otimes_k l = X \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}(l)$ qui est naturellement un l -schéma. On a alors une bijection naturelle entre $X(l)$ et $X_l(l)$, i.e. entre points l -rationnels du k -schéma X et points rationnels du l -schéma X_l .

(3) Si l/k est une extension galoisienne, le groupe de Galois $G = \operatorname{Gal}(l/k)$ agit à droite sur $X(l)$ de la manière suivante : à tout k -automorphisme $\sigma : l \rightarrow l$ est associé un morphisme $\operatorname{Spec}(l) \rightarrow \operatorname{Spec}(l)$ et on agit sur $\operatorname{Hom}_k(\operatorname{Spec}(l), X)$ par précomposition.

5.5.3 Proposition. Soit k un corps et X un k -schéma localement de type fini. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique, et notons $G_l := \operatorname{Gal}(l/k)$ le groupe des k -automorphismes d'une extension $k \subset l \subset \bar{k}$. Alors, l'ensemble $|X|_0$ des points fermés de X est dense et on a :

$$|X|_0 = \bigcup_{\substack{l/k \text{ finie} \\ \text{galoisienne}}} X(l)/G_l = X(\bar{k})/G_{\bar{k}}.$$

Autrement dit, les points fermés de X sont en bijection avec les orbites de $X(\bar{k})$ sous l'action du groupe de Galois.

Le symbole $\cup$ qui apparaît désigne soit une réunion dans $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$ soit une limite inductive.

Démonstration : L'énoncé est local sur X donc on peut remplacer X par un ouvert affine et donc supposer $X = \text{Spec}(A)$ affine. Dire que l'ensemble des points fermés de X est dense revient à dire qu'un idéal $I \subset A$ qui est inclus dans tous les idéaux maximaux est nilpotent. Ceci découle du fait que les algèbres de type fini sur un corps sont des *anneaux de Jacobson*, i.e. tout premier est intersection d'idéaux maximaux (plus généralement, la propriété de Jacobson est stable par passage à une algèbre de type fini). Ce résultat est une forme forte du Nullstellensatz et on le trouve dans [Mat], th. 5.5 ou [Ei], th. 4.19.

Maintenant soit $x \in X$ un point fermé, i.e. $x = [m]$ avec m maximal. Alors le corps résiduel $l := \kappa(x) = A/m$ est une extension finie de k d'après [Mat], th. 5.4. Ceci détermine un l -point de X puis une orbite sous G_l . Réciproquement, considérons une orbite de $X(l)$ sous G_l . Elle est représentée par un morphisme de k -algèbres $\varphi : A \rightarrow l$. Le noyau $m = \ker(\varphi)$ est un idéal maximal de A , qui ne dépend pas du choix d'un élément dans l'orbite de φ puisque $\ker(\sigma\varphi) = \ker(\varphi)$. Il détermine un point fermé de X .

Enfin, le fait que tout $\bar{k}$ -point de X se factorise par un l -point pour une extension finie l/k provient du fait que si $\varphi : A \rightarrow \bar{k}$ est un morphisme de k -algèbres, alors l'image est une k -algèbre intègre, algébrique et de type fini, donc un corps extension finie de k . On en déduit que l'ensemble $|X|_0$ se décrit aussi comme $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$. $\square$

5.5.4 Exemple. Le groupe de Galois de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et engendré par la conjugaison complexe. Dans le $\mathbb{R}$ -schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$, le point déterminé par l'idéal maximal $(t^2 + 1)$ correspond à l'orbite du $\mathbb{C}$ -point $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto i$. L'autre point de l'orbite est le $\mathbb{C}$ -point $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto -i$.

5.5.5 Remarque. On trouvera une étude plus fine du lien entre le k -schéma X et le $\bar{k}$ -schéma $X \otimes_k \bar{k}$ dans Mumford [Mu], II, § 4.

5.5.6 Exercice. (1) Soit k un corps algébriquement clos. Montrez que dans la catégorie des ensembles algébriques classiques, les produits existent, et que ensemblistement l'ensemble algébrique produit $X \times Y$ est le produit des ensembles algébriques X et Y . (On pourra commencer par le cas affine.)

(2) Montrez que l'équivalence de catégories du théorème 5.4.2 est compatible au produit.

(3) Montrez que si k n'est pas algébriquement clos, il est faux en général que l'ensemble des points fermés d'un schéma produit $X \times_{\text{Spec}(k)} Y$ est égal au produit des ensembles de points fermés de X et Y . (On pourra regarder le cas où $X = Y = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ dans [EH], II.2.)

5.5.7 Définition. Soit k un corps et X un k -schéma. On dit que X est *géométriquement réduit* (resp. *irréductible*, *intègre*, *connexe*) si $X \otimes_k \bar{k}$ est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe).

Il est équivalent de demander que $X \otimes_k l$ soit réduit (irréductible, intègre, connexe) pour toute extension finie l/k . On montre facilement que si X est géométriquement *truc*, alors il est *truc*. Par

exemple, dans le cas géométriquement réduit, on se ramène au cas affine et le résultat découle du fait qu'on a une injection d'anneaux $A \hookrightarrow A \otimes_k \bar{k}$ donc A est réduit si $A \otimes_k \bar{k}$ l'est.

Nous sommes plutôt intéressés par des exemples qui montrent que les assertions réciproques ne sont pas vraies en général.

5.5.8 Exemples. (1) Soit k un corps non parfait et $a \in k$ un élément qui n'est pas une puissance p -ième. Soit $l = k[t]/(t^p - a)$ qui est un corps, extension purement inséparable de degré p de k . Posons $X = \text{Spec}(l)$. Alors X est réduit (et même intègre). Soit $\alpha \in l$ une racine p -ième de a , par exemple la classe de t . On a :

$$l \otimes_k l = l[t]/(t^p - a) = l[t]/((t - \alpha)^p).$$

Cet anneau n'est pas réduit, donc $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l)$ non plus. De manière générale, ce sont les extensions inséparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère réduit par extension de corps.

(2) Soit $k = \mathbb{Q}$ et X le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$ d'équation $x^2 - 2y^2 = 0$. Alors X est intègre, mais comme $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$, le schéma $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ n'est pas irréductible. De manière générale, ce sont les extensions séparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère irréductible par extension de corps.

(3) Soit l/k une extension finie galoisienne non triviale de groupe de Galois G . On a un morphisme d'anneaux $u : l \otimes_k l \rightarrow \prod_{\sigma \in G} l$ défini sur les tenseurs irréductibles par $a \otimes b \mapsto (a\sigma(b))_{\sigma \in G}$. On peut voir que u est un isomorphisme d'au moins deux manières :

- on observe que u peut être vu comme une application linéaire entre deux l -espaces vectoriels de dimension $n = [l : k]$, puisque $u(a \otimes b) = au(1 \otimes b)$. Comme l/k est séparable, elle est monogène et on peut en choisir un générateur α . Alors $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \alpha, \dots, 1 \otimes \alpha^{n-1}\}$ est une l -base de $l \otimes_k l$. Notons $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Le déterminant de u dans les bases convenables est le déterminant de Vandermonde $\det(\sigma_i(\alpha)^j) = \prod_{i < j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))$. Il est non nul.
- si on choisit un polynôme $P \in k[t]$ dont l est le corps de décomposition, alors l est engendré par une racine β de P et ses conjugués $\sigma_i(\beta)$. Le morphisme u s'identifie au morphisme :

$$l \otimes_k l \simeq l[t]/(P(t)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l[t]/(t - \sigma(\beta)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l.$$

Considérons le k -schéma $X = \text{Spec}(l)$. Il résulte de ce qui précède que $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l) = \coprod_{\sigma \in G} \text{Spec}(l)$. Ainsi X est connexe, mais pas géométriquement connexe. Ici aussi, les extensions séparables de corps causent la perte du caractère connexe par extension de corps.

5.5.9 Définition. Soit X un schéma sur un corps k . On dit que X peut être défini sur un sous-corps $k_0 \subset k$ s'il existe un k_0 -schéma X_0 et un isomorphisme de k -schémas $X \simeq X_0 \otimes_{k_0} k$.

Le k_0 -schéma X_0 , s'il existe, n'est pas unique en général. Voici un exemple.

5.5.10 Exemple. La droite projective complexe $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ peut être définie sur $\mathbb{R}$ d'au moins deux manières. Notons $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la conique projective plane réelle d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On a $X_0 \not\simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ car la conique X_0 ne possède pas de point $\mathbb{R}$ -rationnel. Il est clair que $X \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et nous allons voir que l'on a aussi $X \simeq X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce fait classique provient de la paramétrisation des coniques ayant un point rationnel. Plus précisément, si P est un point rationnel d'une conique

projective plane C , les droites D_t passant par P sont paramétrées par les points $t = (u : v)$ d'une droite projective. Elles intersectent la conique en un unique point Q distinct de P , sauf la tangente en P pour laquelle on prend $Q = P$. Ceci fournit l'isomorphisme désiré. Explicitement, en prenant le point $\mathbb{C}$ -rationnel $P = (i : 1 : 0)$ dans la conique $X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\longrightarrow X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ (u : v) &\longmapsto (i(u^2 + v^2) : u^2 - v^2 : 2uv) \\ (y - ix : z) &\longleftarrow (x : y : z) \end{aligned}$$

La présence inévitable du i montre qu'un isomorphisme $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow X_0$ peut être défini après changement de base à $\mathbb{C}$, alors qu'il n'en existe pas sur $\mathbb{R}$.

Table des matières

1	Contexte et motivation	2
1.1	Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres	2
1.2	Variétés algébriques classiques	2
1.3	L'idée des schémas	4
2	Définition des schémas	5
2.1	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	5
2.2	L'espace topologique d'un schéma affine	9
2.3	Interlude 1 : catégories et foncteurs	10
2.4	Interlude 2 : faisceaux	14
2.5	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	17
2.6	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	18
2.7	Définition des schémas et des morphismes de schémas	26
3	Recollement et produits fibrés	28
3.1	Recollement	28
3.2	Schémas relatifs et foncteur de points	32
3.3	L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$	33
3.4	L'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$	35
3.5	Produits fibrés	36
4	Modules sur les schémas	41
4.1	Modules sur les espaces annelés	41
4.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas	43
4.3	Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas	49
4.4	Algèbres quasi-cohérentes	52
4.5	Faisceaux inversibles	55
5	Quelques propriétés, quelques exemples	59
5.1	Fermés irréductibles et points	59
5.2	Schémas réduits et intègres	61
5.3	Schémas noethériens	62
5.4	Variétés classiques	63
5.5	Schémas sur un corps non algébriquement clos	66