

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 29 novembre 2016

5.6 Schémas arithmétiques

Nous donnons deux exemples de schémas sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui permettent d'avoir un bref aperçu sur :

- la manière dont la théorie algébrique des nombres se plonge dans le monde des schémas ;
- la notion de « famille d'objets » en géométrie algébrique et le rôle de la platitude.

5.6.1 Un anneau d'entiers algébriques. Considérons le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, son anneau d'entiers $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et le morphisme $f : X = \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. En théorie algébrique des nombres, on cherche à comprendre comment les premiers $p \in \mathbb{Z}$ se décomposent dans $\mathcal{O}_K$, ce qui revient à étudier l'idéal $p\mathcal{O}_K$. Comme $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$, on voit que ceci revient à étudier les fibres de f . L'invariant le plus important est le *discriminant* de K , défini en général par $\text{disc}(K) = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une $\mathbb{Z}$ -base de $\mathcal{O}_K$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ (ou les éléments du groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$, dans le cas galoisien). Ici on prend $\{1, \sqrt{3}\}$ pour $\mathbb{Z}$ -base et $\{\text{id}, \sigma : \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}\}$ pour liste de plongements complexes. On obtient :

$$\text{disc}(K) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}^2 = 12.$$

Comme dans 5.5.8(3), cette quantité mesure le défaut de bijectivité de l'application :

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ a \otimes b & \longmapsto & (ab, a\sigma b). \end{array}$$

En l'occurrence, après localisation en 12 c'est-à-dire après tensorisation par $\mathbb{Z}[1/12]$ celle-ci devient un isomorphisme. C'est ce fait qui est derrière la description géométrique des fibres de $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Avant de donner cette description, signalons que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 3)$ et que $\text{disc}(K)$ peut aussi se calculer comme le discriminant du polynôme $X^2 - 3$. Il y a trois types de comportements possibles :

- (i) si $p \mid \text{disc}(K)$ i.e. $p = 2$ ou 3 , alors p devient carré dans $\mathcal{O}_K$. Précisément $2\mathcal{O}_K = (1 + \sqrt{3})^2$ et $3\mathcal{O}_K = (\sqrt{3})^2$. La fibre X_p est le spectre de $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$, c'est un point non réduit de corps résiduel $\mathbb{F}_p$.
- (ii) si $p > 3$ et 3 est un carré modulo p , le polynôme $X^2 - 3$ se factorise dans $\mathbb{F}_p$ en produit de facteurs de degré 1. Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 1 ou 11 modulo 12. La fibre X_p est réunion de deux points réduits, $\mathbb{F}_p$ -rationnels.
- (iii) si $p > 3$ et 3 n'est pas carré modulo p , le polynôme $X^2 - 3$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p$. Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 5 ou 7 modulo 12. Ici la fibre X_p est composée d'un seul point $\mathbb{F}_{p^2}$ -rationnel.

L'apparition d'éléments nilpotents dans la fibre dans le cas (i) est typique du comportement de ramification. La situation est géométriquement très différente de ce qu'il se produit dans les deux derniers cas. Les cas (ii) et (iii) présentent une différence arithmétique qui se manifeste dans les corps résiduels. En revanche leur géométrie est essentiellement la même, au sens où après une extension finie de la base destinée à s'affranchir des contraintes arithmétiques, les fibres sont des réunions de deux points réduits. C'est ce que montre l'application $(\star)$.

5.6.2 Une famille de coniques. Soit $f = Y^2 - X^2 - 5$ et $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y]/(f))$. Nous ne développons pas la notion de *lissité* dans ce cours ; contentons-nous pour analyser cet exemple de dire que, comme en géométrie différentielle, le lieu où X est lisse sur $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des points x en lesquels la matrice jacobienne $J = (\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ est de rang maximum, c'est-à-dire ici 1, ce qui signifie que dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, ou de manière équivalente dans le corps résiduel $\kappa(x)$, l'un des 1-mineurs de J est inversible. Notons $x = [q]$ un point quelconque de X et $s = f(x) = [p]$ où $p = q \cap \mathbb{Z}$. Dans notre exemple, la matrice $J = (2X, 2Y)$ est de rang 1 en $x = [q]$ si et seulement si l'idéal $(2X, 2Y)$ est inclus dans q . Il est équivalent de dire que $2 \in q$ ou que $(X, Y) \subset q$. Dans le deuxième cas, l'équation f implique que $5 \in q$. On peut résumer ainsi :

- la fibre de X en $p = 2$ est singulière, son équation $f = (Y + X + 1)^2$ est celle d'une droite double (d'épaisseur 2) dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_2}^2$,
- la fibre de X en $p = 5$ est singulière, son équation $f = (Y - X)(Y + X)$ est celle de la réunion de deux droites avec une intersection transverse en $x = y = 0$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_5}^2$,
- les autres fibres, y compris la fibre générique, sont des coniques lisses.

6 Morphismes

Dans cette section, nous définissons quelques grandes classes de morphismes de schémas reliées principalement à des propriétés de séparation, finitude et compacité. Pour des raisons de temps et de place, nous ne développerons pas l'étude des propriétés de régularité (platitude, lissité, non ramification, caractère étale). Avant de commencer, faisons deux remarques générales.

La première remarque concerne le lien avec le point de vue relatif, mis en avant par Grothendieck et aperçu lors de l'étude des produits fibrés et des exemples de schémas arithmétiques comme la famille de coniques 5.6.2. Son principe est de mettre l'accent sur les objets sur une base S , c'est-à-dire les morphismes $X \rightarrow S$, plutôt que sur les schémas individuels. La logique et le développement harmonieux de ce point de vue nécessitent de développer des analogues relatifs de certaines notions absolues des schémas (comme le caractère affine, la quasi-compacité...). Une règle simple sera vérifiée : un schéma X possèdera une propriété « absolue » si et seulement si le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ possède la propriété « relative » correspondante.

La seconde remarque concerne les qualités de stabilité, ou de permanence, des différentes propriétés des morphismes. Nous donnons quatre exemples. Soit P une propriété que peut avoir ou non un morphisme de schémas.

- On dit que P est *stable par composition* si pour tout couple de morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow S$ qui possèdent P , la composée $g \circ f : X \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par changement de base* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ possède P (ici $X' := X \times_S S'$ et f' est la projection).

- On dit que P est *stable par localisation à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $X_i \subset X$, le morphisme $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P . On dit que P est *locale à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{X_i\}$ de X , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par localisation au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $S_i \subset S$, le morphisme $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P . On dit que P est *locale au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{S_i\}$ de S , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P .

Pour chacune des propriétés introduites dans cette section, on peut se poser la question de savoir si elle est stable par composition, changement de base, localisation à la source ou au but. Nous donnerons parfois un énoncé explicite, et parfois un énoncé sous forme d'exercice. Parfois aussi nous omettrons de poser la question, et la lectrice pourra se la poser pour elle-même.

6.1 Morphismes séparés

On peut consulter la page [https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_\(topologie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_(topologie)) pour un rappel sur les différents axiomes de séparation. Rappelons quelques propriétés d'un espace topologique séparé (*Hausdorff space* en anglais). Elles sont toutes équivalentes et peuvent servir de définition de la notion de séparation :

- (i) pour tous points distincts $x, y \in X$ il existe des voisinages ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$,
- (ii) la diagonale Δ_X est fermée dans $X \times X$,
- (iii) pour tout espace topologique Y et toute application continue $f : Y \rightarrow X$, le graphe $\Gamma_f = \{(y, f(y)); y \in Y\}$ est fermé dans $X \times Y$,
- (iv) pour tout espace topologique Y et toute paire d'applications continues $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = \{y \in Y; f(y) = g(y)\}$ est fermé dans Y .

La propriété (i) est la plus familière; c'est l'axiome T_2 . La démonstration du fait qu'elle est équivalente aux trois autres utilise le fait que la topologie sur $X \times X$ est la topologie produit, avec pour base d'ouverts les produits $U \times V$ d'ouverts de X . Ceci n'a pas lieu dans le monde des variétés algébriques ou des schémas (dans le plan $\mathbb{A}_k^2$, l'ouvert complémentaire d'une courbe qui n'est ni horizontale ni verticale ne contient aucun ouvert produit non trivial). En conséquence, la caractérisation (i) de la séparation est pratiquement inutile pour les schémas. En revanche les autres caractérisations sont pertinentes; nous utiliserons (ii).

6.1.1 Lemme. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ la diagonale. Alors $\Delta_{X/S}$ est :*

- (1) *une immersion;*
- (2) *une immersion fermée si X et S sont affines.*

Démonstration : Démontrons d'abord (2). Si $X = \text{Spec}(A)$ et $S = \text{Spec}(R)$, la diagonale est déterminée par le morphisme d'anneaux $A \otimes_R A \rightarrow A$ qui envoie $a \otimes 1$ sur a et $1 \otimes a'$ sur a' . C'est

le morphisme de multiplication, qui est surjectif. Passons à (1). Soit $x \in X$. Soit U un voisinage ouvert affine de $f(x)$ et V un voisinage ouvert affine de x inclus dans $f^{-1}(U)$. Clairement l'image de la diagonale est incluse dans les ouverts de la forme $V \times_U V$. De plus $\Delta_{X/S|V} : V \rightarrow V \times_U V$ est une immersion fermée d'après le cas (2). Ceci conclut. $\square$

6.1.2 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *séparé* si la diagonale relative $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée. On dit aussi que X est un S -schéma séparé.

6.1.3 Proposition. *Les morphismes séparés sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. $\square$

6.1.4 Définition. On dit qu'une immersion ouverte $i : U \hookrightarrow X$ est *schématiquement dense* dans X si le morphisme de restriction des fonctions $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_U$ est injectif.

6.1.5 Proposition. *Soit X un S -schéma séparé.*

- (1) *Pour tout morphisme de S -schémas $f : Y \rightarrow X$, le morphisme graphe $\Gamma_f := (\text{id}, f) : Y \rightarrow Y \times_S X$ est une immersion fermée.*
- (2) *Pour toute paire de S -morphisms $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = Y \times_{(f,g), X \times_S X, \Delta} X$ est un sous-schéma fermé de Y .*
- (3) *Pour toute paire de S -morphisms $f, g : Y \rightarrow X$ qui coïncident sur un ouvert schématiquement dense $U \subset Y$, on a $f = g$.*

Démonstration : (1) Le graphe $\Gamma_f : Y \rightarrow Y \times_S X$ s'obtient à partir de la diagonale $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ par changement de base par le morphisme $(f \times \text{id}) : Y \times_S X \rightarrow X \times_S X$. Le résultat découle donc du fait que les immersions fermées sont stables par changement de base.

(2) Par définition $\text{egal}(f, g)$ s'obtient par un changement de base de la diagonale.

(3) Soit i l'immersion fermée de $Z = \text{egal}(f, g)$ dans Y . Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte. Par hypothèse j se factorise par un morphisme $k : U \rightarrow Z$ (qui est nécessairement une immersion), i.e. $j = ik$. Comme U est schématiquement dense (définition 6.1.4), le morphisme composé

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{i^\#} i_*\mathcal{O}_Z \xrightarrow{i_*k^\#} j_*\mathcal{O}_U = i_*k_*\mathcal{O}_U$$

est injectif. On en déduit que $\mathcal{O}_Y \rightarrow i_*\mathcal{O}_Z$ est injectif, et comme il est surjectif c'est un isomorphisme de faisceaux. Donc $Z \simeq Y$, ce qui montre que $f = g$. $\square$

6.1.6 Exercice. Soit X la droite affine avec origine dédoublée, sur un corps de base k (voir 3.1.6). Montrez que X n'est pas séparé sur k . Donnez un exemple de deux morphismes de k -schémas $f, g : Y \rightarrow X$ qui sont distincts mais coïncident sur un ouvert schématiquement dense de Y .

Table des matières

1	Contexte et motivation	2
1.1	Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres	2
1.2	Variétés algébriques classiques	2
1.3	L'idée des schémas	4
2	Définition des schémas	5
2.1	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	5
2.2	L'espace topologique d'un schéma affine	9
2.3	Interlude 1 : catégories et foncteurs	10
2.4	Interlude 2 : faisceaux	14
2.5	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	17
2.6	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	18
2.7	Définition des schémas et des morphismes de schémas	26
3	Recollement et produits fibrés	28
3.1	Recollement	28
3.2	Schémas relatifs et foncteur de points	32
3.3	L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$	33
3.4	L'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$	35
3.5	Produits fibrés	36
4	Modules sur les schémas	41
4.1	Modules sur les espaces annelés	41
4.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas	43
4.3	Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas	49
4.4	Algèbres quasi-cohérentes	52
4.5	Faisceaux inversibles	55
5	Quelques propriétés, quelques exemples	59
5.1	Fermés irréductibles et points	59
5.2	Schémas réduits et intègres	61
5.3	Schémas noethériens	62
5.4	Variétés classiques	63
5.5	Schémas sur un corps non algébriquement clos	66
5.6	Schémas arithmétiques	70
6	Morphismes	71
6.1	Morphismes séparés	72