

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 27 septembre 2016

Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $\mathcal{F} \in F(X)$, alors $f_*\mathcal{F}$ tel qu'on l'a défini est un faisceau. En revanche, pour $\mathcal{F} \in F(Y)$, le préfaisceau $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas toujours un faisceau. Un exemple simple de ce phénomène est donné dans l'exercice suivant.

2.6.9 Exercice. Soit X un espace topologique irréductible, par exemple $X = \text{Spec}(A)$ avec A intègre. On rappelle que dans ce cas, tous les ouverts non vides de X sont denses, voir 2.2.4. Montrez que le préfaisceau défini par $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ est un faisceau. Supposons que X contient deux points fermés $x_1 \neq x_2$ et notons $f : \{x_1, x_2\} \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrez que le préfaisceau $f^{-1}\mathcal{F}$ n'est pas un faisceau.

Il est donc crucial de savoir qu'on peut revenir dans la catégorie des faisceaux en associant à un préfaisceau une « meilleure approximation par un faisceau ». Ceci s'exprime ainsi.

2.6.10 Proposition. *Il existe un foncteur $a : P(X) \rightarrow F(X)$ de faisceau associé ou faisceautisation qui est adjoint à gauche pour l'inclusion $i : F(X) \hookrightarrow P(X)$, i.e. on a*

$$\text{Hom}_{P(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) = \text{Hom}_{F(X)}(a(\mathcal{F}), \mathcal{G})$$

fonctoriellement en $\mathcal{F} \in P(X)$ et $\mathcal{G} \in F(X)$. (On note $i(\mathcal{G})$ pour souligner l'adjonction, mais on note $\mathcal{G}$ dans la pratique.) Le morphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow a(\mathcal{F})$, correspondant à l'identité de $\mathcal{G} = a(\mathcal{F})$ par adjonction, est un isomorphisme sur les fibres.

La situation est similaire à celle de l'exemple (2) de la remarque 2.6.7, c'est-à-dire que a est un adjoint de la famille des réflecteurs.

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau (de groupes abéliens). Pour $U \subset X$ ouvert, soit $\mathcal{F}'(U)$ l'ensemble des collections $(s(x))_{x \in U}$, $s(x) \in \mathcal{F}_x$, qui proviennent localement d'une section, comme dans l'exercice 2.4.5. Alors $\mathcal{F}'$ est un faisceau ; on pose $a(\mathcal{F}) := \mathcal{F}'$. On montre facilement que a s'étend en un foncteur. Si $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme à valeurs dans un faisceau $\mathcal{G}$, on en déduit un morphisme $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}'$. Comme $\mathcal{G}$ est un faisceau, on a $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'$, d'où on déduit un morphisme $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ par lequel φ se factorise. Ceci montre que a vérifie la propriété attendue. $\square$

On utilise la faisceautisation pour définir l'image inverse faisceautique :

2.6.11 Définition. L'image inverse d'un faisceau $\mathcal{F} \in F(X)$ par une application continue $f : Y \rightarrow X$ est le faisceau associé au préfaisceau $f^{-1}(\mathcal{F})$ défini précédemment. On la note encore $f^{-1}(\mathcal{F})$.

2.6.12 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*)). Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, on a une bijection

$$\text{Hom}_{F(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{F(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fonctorielle en les faisceaux $\mathcal{F} \in F(X)$ et $\mathcal{G} \in F(Y)$. $\square$

2.6.13 Exercice. Démontrez cette proposition.

2.6.14 Exercice. Soit X un espace topologique. Étant donné un ensemble E possédant au moins deux éléments, on définit le *préfaisceau constant de valeur E* en posant $\mathcal{F}(U) = E$ pour tout ouvert U , et en prenant toutes les restrictions égales à l'identité de E . Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$ soit un faisceau. Dans le cas général, décrivez le faisceau associé $\mathcal{F}'$, que l'on appelle le *faisceau constant de valeur E* .

2.6.15 Exercice. On construit quatre catégories dont les objets sont les paires $(X, \mathcal{F})$ composées d'un espace topologique et un faisceau d'ensembles dessus. Les morphismes entre $(X, \mathcal{F})$ et $(Y, \mathcal{G})$ sont les paires (f, φ) où $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et φ est un certain morphisme de faisceaux. Les quatre catégories diffèrent par le morphisme φ .

(1) Dans C_1 , on prend pour $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_2 , on prend pour $\varphi : f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Justifiez qu'on obtient bien des catégories, en décrivant la composition naturelle des morphismes dans chacune. Montrez que C_1 et C_2 ne sont pas équivalentes (*suggestion : regardez les ensembles $\text{Hom}_{C_i}((X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}))$ lorsque $X = \emptyset$*).

(2) Dans C_3 , on prend pour $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_4 , on prend pour $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Décrivez la composition naturelle des morphismes dans ces catégories. Montrez que C_3 et C_4 sont isomorphes.

Lorsque $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ représentent des faisceaux de fonctions (de n'importe quelle sorte) sur X, Y , la fonctorialité naturelle est *contravariante*, puisque $f : X \rightarrow Y$ fait correspondre à une fonction u sur Y la fonction $u \circ f$ sur X . C'est donc la situation (2).

2.7 Définition des schémas et des morphismes de schémas

2.7.1 Définition. On appelle *espace localement annelé* ou *espace annelé en anneaux locaux* un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ composé d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux. On note souvent X au lieu de $(X, \mathcal{O}_X)$. On appelle *morphisme d'espaces localement annelés* un couple $(f, f^\#)$ composé d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tel que pour tout $x \in X$ d'image $y = f(x)$, le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{f_y^\#} (f_*\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

est un morphisme d'anneaux locaux. On note souvent $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $(f, f^\#)$.

Le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est souvent appelé le *comorphisme* de f . On prendra garde au fait que, contrairement à ce que la terminologie et la notation peut laisser croire, *il n'est pas déterminé par f* .

Si U est un ouvert de X et $i : U \rightarrow X$ est l'inclusion, l'espace U muni du faisceau $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U = i^{-1}\mathcal{O}_X$ (voir 2.6.2) est un espace localement annelé. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme, $V \subset Y$ un ouvert, $U \subset X$ sa préimage, on a de même un morphisme d'espaces localement annelés induit $f|_U : U \rightarrow V$.

2.7.2 Définition. On appelle *schéma* un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ qui possède un recouvrement ouvert $X = \cup U_i$ tel que les espaces localement annelés $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ sont isomorphes à des schémas affines. Si X, Y sont deux schémas, un *morphisme de schémas* est un morphisme d'espaces annelés $f : X \rightarrow Y$. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ est appelé *faisceau de fonctions* ou *faisceau structural* du schéma X . L'espace topologique sous-jacent au schéma X est parfois noté $|X|$ et appelé le *support* de X .

Écrivons explicitement comment s'effectue la composition d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ avec un morphisme $g : Y \rightarrow Z$ (voir aussi l'exercice 2.6.15). On considère le comorphisme $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ et son image directe $g_*f^\# : g_*\mathcal{O}_Y \rightarrow g_*f_*\mathcal{O}_X$. Alors, le morphisme composé $X \rightarrow Z$ est le morphisme $(h, h^\#)$ où $h = g \circ f$ est la composée des applications continues, et $h^\# = g_*f^\# \circ g^\#$:

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\#} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*f^\#} g_*f_*\mathcal{O}_X = h_*\mathcal{O}_X.$$

2.7.3 Les schémas affines. Un schéma affine est évidemment un schéma. La catégorie des schémas affines est définie comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas. On peut (enfin) compléter la définition du foncteur spectre :

$$\text{Spec} : \{\text{anneaux}\} \longrightarrow \{\text{schémas affines}\},$$

déjà défini sur les objets, en décrivant son action sur les morphismes. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on a défini une application continue $f = \text{Spec}(\varphi) : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ et nous devons lui associer un morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ pour en faire un morphisme de schémas. On sait qu'il suffit de définir $f^\#$ sur les ouverts principaux $U = D(f)$, $f \in A$. Pour un tel ouvert, on a $f^{-1}(U) = \{y = [q] \in Y; q \cap A \not\supseteq f\} = \{y = [q] \in Y; q \ni f\} = D(f)$ où l'on note encore f l'image de f dans B , pour simplifier. On aura donc $f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(D(f)) = B_f$ et on peut définir : $f^\#(U) : A_f \rightarrow B_f$ comme étant le morphisme d'anneaux naturel déduit de $\varphi : A \rightarrow B$ par passage aux localisés. On vérifie que ces constructions font de $f^\#$ un morphisme de faisceaux, et que Spec devient un foncteur comme désiré.

2.7.4 Exercice. Montrez que le foncteur *sections globales du faisceau de fonctions* $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$ et le foncteur spectre $A \mapsto \text{Spec}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses :

$$\{\text{schémas affines}\} \xrightleftharpoons[\text{Spec}]{\Gamma} \{\text{anneaux}\}.$$

On a ainsi complété le diagramme de 1.3.

2.7.5 Exercice. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et U l'ouvert $D(f)$ pour $f \in A$. Montrez que $U = (U, \mathcal{O}_{X|U}) \simeq \text{Spec}(A_f)$.

Nous allons donner les premiers exemples de schémas non affines.

2.7.6 Sous-schémas ouverts. Soit X un schéma. Si $i : U \subset X$ est un ouvert de l'espace topologique sous-jacent à X , l'espace annelé $(U, \mathcal{O}_U)$ avec $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U} = i^{-1}\mathcal{O}_X$, est un schéma (voir 2.6.2 pour la restriction d'un faisceau à un ouvert). En effet, soit $x \in U$ un point. Soit $V = \text{Spec}(A)$ un ouvert affine de X contenant x . Comme les ouverts distingués de V forment une base de sa topologie, il existe $f \in A$ tel que $W = D(f) \subset U$ contient x . Alors $(W, \mathcal{O}_W) = (W, \mathcal{O}_{X|W}) = (W, \mathcal{O}_{U|W})$ est un schéma affine et on a ainsi recouvert U par des schémas affines. On dit que la structure de schéma sur U est *induite* par celle de X .

2.7.7 Définition. Un *sous-schéma ouvert* de X est un ouvert $U \subset X$ muni de sa structure de schéma induit. Une *immersion ouverte* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} U \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma ouvert dans X .

2.7.8 Proposition. Soit $i : U \subset X$ un sous-schéma ouvert de X . Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas tel que $f(|Y|) \subset |U|$. Alors, il existe un unique morphisme de schémas $g : Y \rightarrow U$ tel que $f = i \circ g$.

Démonstration : Comme U est ouvert, l'application $g : |Y| \rightarrow |U|$ définie par $g(y) = f(y)$ est continue et vérifie $f = i \circ g$. Par l'adjonction (f^{-1}, f_*) , le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ détermine un morphisme $g^{-1}i^{-1}\mathcal{O}_X = f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Par l'adjonction (g^{-1}, g_*) , on obtient un morphisme $\mathcal{O}_U = i^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y$ que nous notons $g^\#$. Il est facile de vérifier que la paire $(g, g^\#)$ définit un morphisme de schémas. $\square$

2.7.9 Exemple. Soit $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ le plan affine sur un corps k . Montrons que le sous-schéma ouvert $U = X \setminus \{0\}$, complémentaire de l'origine $\{0\} = V(x, y)$, n'est pas affine. Calculons les fonctions globales sur U . D'après la propriété de faisceau, une fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est déterminée par ses restrictions $f|_{D(x)}$ et $f|_{D(y)}$ qui coïncident sur $D(xy)$. Or $\mathcal{O}_X(D(x)) = k[x, y, 1/x]$ et $\mathcal{O}_X(D(y)) = k[x, y, 1/y]$, et les deux applications de restriction vers $\mathcal{O}_X(D(xy)) = k[x, y, 1/x, 1/y]$ sont les inclusions. Ainsi f est un élément de l'intersection $k[x, y, 1/x] \cap k[x, y, 1/y]$ prise dans $k[x, y, 1/x, 1/y]$, i.e. $f \in k[x, y]$. En conclusion la restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme. Si U était affine, en passant aux spectres on obtiendrait que l'inclusion $U \rightarrow X$ est un isomorphisme. Donc U n'est pas affine.

2.7.10 Exercice. Soit X un schéma et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction régulière globale. Montrez que l'ensemble $X_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de X .

3 Recollements et produits fibrés

Dans cette partie, nous introduisons quelques propriétés et attributs des schémas. Nous donnons aussi quelques constructions et des premiers exemples, mais l'accent est surtout mis sur la présentation de concepts qui permettront de décrire des exemples plus concrets dans la partie suivante.

3.1 Recollement

En topologie, le procédé de *recollement* (*gluing* ou *glueing* en anglais) consiste à donner des espaces topologiques X_i indicés par un ensemble I , et des ouverts $X_{i,j} \subset X_i$ pour chaque paire d'indices i, j que l'on recolle au moyen d'homéomorphismes convenables $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \simeq X_{j,i}$ pour former un nouvel espace topologique X contenant les X_i comme ouverts. La construction réalise X comme un quotient de la somme disjointe $\coprod X_i$ par une relation d'équivalence ; il s'agit donc d'un cas particulier de la notion d'espace topologique quotient. Ce procédé est familier par exemple pour fabriquer la droite projective complexe comme réunion de deux copies de $\mathbb{C}$ recollées le long de leurs ouverts $\mathbb{C}^*$. Nous décrivons ici sa formulation dans le cadre des schémas.

3.1.1 Théorème. Supposons donnés :

- une famille de schémas $\{X_i\}_{i \in I}$,
- des familles d'ouverts $X_{i,j} \subset X_i$ pour $i, j \in I$,
- des isomorphismes de schémas $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ pour $i, j \in I$,

satisfaisant les conditions :

- $X_{i,i} = X_i$ et $\varphi_{i,i} = \text{id}$ pour tout i ,
- $\varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}$,
- $\varphi_{i,j}(X_{i,j} \cap X_{i,k}) = X_{j,i} \cap X_{j,k}$ et $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ pour tous i, j, k .

Alors il existe un unique schéma X possédant un recouvrement par des ouverts $U_i \subset X$ isomorphes aux X_i , de telle manière que les intersections $U_i \cap U_j$ sont isomorphes aux $X_{i,j}$ et que les applications identiques $U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ s'identifient aux isomorphismes $\varphi_{i,j}$. Il est appelé le recollement des X_i le long des ouverts $X_{i,j}$, ou recollement des X_i le long des isomorphismes $\varphi_{i,j}$.

3.1.2 Exemples. Voici deux exemples simples.

(1) (Décollement) Soit X un schéma et (X_i) un recouvrement ouvert de X (chaque sous-espace ouvert de l'espace topologique $|X|$ détermine un sous-schéma ouvert $X_i \subset X$, i.e. X_i est en particulier un schéma). Considérons les ouverts $X_{i,j} := X_i \cap X_j$. On a $X_{j,i} = X_j \cap X_i = X_{i,j}$ et on peut noter $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ le morphisme identité. La donnée $(X_i, X_{i,j}, \varphi_{i,j})$ est obtenue en quelque sorte en « décollant » X . Le recollement des X_i le long des $\varphi_{i,j}$ est le schéma initial X .

(2) Dans le cas où tous les $X_{i,j}$ sont vides, on obtient la *somme disjointe* (ou *réunion disjointe*) des X_i , notée $X := \coprod_{i \in I} X_i$. On construit X de la manière suivante. L'espace topologique sous-jacent est la somme (ou réunion) disjointe des X_i . Ses éléments sont des paires (i, x) avec $x \in X_i$, et ses ouverts sont les parties de la forme $U := \coprod_{i \in I} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de X_i . On dispose de morphismes d'inclusion $f_i : X_i \rightarrow X$ qui sont des applications continues ouvertes et fermées. On munit X du faisceau d'anneaux $\mathcal{O} = \prod_{i \in I} (f_i)_* \mathcal{O}_{X_i}$. (L'idée intuitive est qu'une fonction sur une somme disjointe d'espaces X_i est une collection de fonctions sur chacun des X_i .) Pour chaque i , notons $\mathcal{U}_i = (U_{i,j})$ un recouvrement de X_i par des ouverts affines, comme dans la définition 2.7.2. À l'aide de f_i , on peut voir $U_{i,j}$ comme un ouvert de X . On voit facilement que la réunion $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_i$ est un recouvrement de $(X, \mathcal{O})$ par des ouverts affines. Donc X est un schéma.

Le cas simple de la somme disjointe renferme déjà quelques subtilités que l'on voit sur deux exemples proposés en exercice.

3.1.3 Exercice. (1) Montrez que $\text{Spec}(A_1) \amalg \cdots \amalg \text{Spec}(A_n) \simeq \text{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n)$.

(2) Soit k un corps. Soit $X = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ une somme disjointe dénombrable de k -points $X_i = \text{Spec}(k)$. Calculez $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Montrez que X n'est pas un schéma affine. Montrez qu'il existe un morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(k^{\mathbb{N}})$ qui n'est pas surjectif.

3.1.4 Preuve de 3.1.1 : Nous allons expliquer la construction de X et laisser en exercice la vérification des propriétés annoncées. On note X' la somme disjointe des X_i ; ses éléments sont des paires (i, x) avec $x \in X_i$. On munit X' de la relation définie par $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ si et seulement si $x_j = \varphi_{i,j}(x_i)$. Les trois conditions de compatibilité assurent que la relation est réflexive, symétrique et transitive i.e. une relation d'équivalence. On note X le quotient de X' par cette relation d'équivalence et $\pi : X' \rightarrow X$ l'application quotient. On munit X de la topologie quotient, i.e. une partie

$U \subset X$ est déclarée ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset X'$ est ouvert. Il reste à munir X d'un faisceau de fonctions $\mathcal{O}_X$. Le candidat naturel est le faisceau des fonctions sur X' qui sont invariantes pour la relation d'équivalence ; nous allons formaliser ceci précisément. Dans le cadre ensembliste, une relation d'équivalence est une certaine partie $R \subset X' \times X'$. Cette donnée est équivalente à celle de deux applications $s, t : R \rightarrow X'$ telles que $x_1 \sim x_2$ si et seulement s'il existe $r \in R$ tel que $x_1 = s(r)$, $x_2 = t(r)$. Une fonction $f : X' \rightarrow Z$ est invariante pour la relation d'équivalence ssi $f \circ s = f \circ t$, ce qui s'écrit encore $s^\# f = t^\# f$. Ainsi formulées, ces idées s'adaptent sans problème. La relation d'équivalence sur X' est l'ensemble $R = \coprod X_{i,j}$. Le morphisme $s : R \rightarrow X'$ est donné par les inclusions évidentes $X_{i,j} \hookrightarrow X'$, et on a un morphisme de faisceaux $s^\# : \mathcal{O}_{X'} \rightarrow s_* \mathcal{O}_R$ qui fait de s un morphisme de schémas. De même $t : R \rightarrow X'$ est donné par les morphismes $X_{i,j} \xrightarrow{\varphi_{i,j}} X_{j,i} \hookrightarrow X'$. On pose :

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_{X'}(U); s^\#(f) = t^\#(f)\}.$$

Pour finir, on vérifie que X est un schéma et qu'il satisfait les propriétés attendues. Signalons que la construction du faisceau $\mathcal{O}_X$ peut être formulée d'une manière différente, susceptible d'apporter un éclairage complémentaire, dans la proposition 3.10 du livre de Görtz et Wedhorn [GW]. $\square$

3.1.5 Remarques. (1) Il est bien sûr suffisant de se donner des $X_{i,j}$ et des $\varphi_{i,j}$ pour $i \neq j$, mais nous avons préféré inclure les données $i = j$ pour mettre en évidence le fait que les trois conditions de compatibilité correspondent aux trois propriétés de la relation d'équivalence qui définit le recollement.

(2) En topologie, il n'est pas nécessaire que les parties $X_{i,j}$ soient ouvertes pour faire fonctionner la construction et obtenir un recollement. En revanche, en géométrie algébrique, si les $X_{i,j}$ ne sont pas ouverts, l'espace annelé obtenu par recollement est très loin d'être un schéma en général.

(3) Soient $(X_i, \varphi_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{j,i})$ et $(Y_i, \psi_{i,j} : Y_{i,j} \rightarrow Y_{j,i})$ deux collections de données comme dans le théorème 3.1.1. Soient X, Y les schémas obtenus par recollement. Soient $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ des morphismes tels que $f_i(X_{i,j}) \subset Y_{i,j}$ et $\psi_{i,j} \circ f_i = f_j \circ \varphi_{i,j}$ sur $X_{i,j}$, pour tous i, j . Alors les f_i se recollent en un morphisme $f : X \rightarrow Y$. Un cas particulier intéressant est celui où tous les Y_i sont égaux à Y .

(4) La donnée des schémas X_i , des ouverts $X_{i,j}$ et des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ peut sembler lourde à manipuler. En fait, dans la plupart des situations concrètes, ces objets sont souvent « naturels » au point où la vérification des conditions de compatibilité est à peu près triviale. Comme il est écrit dans [EH], § I.2.4 : *In these and indeed in almost all applications, we don't really need to give the maps $\psi_{\alpha\beta}$ explicitly : we are actually given a topological space $|X|$ and a family of open subsets $|X_\alpha|$, each endowed with the structure of an affine scheme — that is, with a structure sheaf $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ — in such a way that $\mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha \cap X_\beta)$ is naturally identified with $\mathcal{O}_{X_\beta}(X_\alpha \cap X_\beta)$. For example, they might both be given as subsets of a fixed set.* Nous allons tout de suite illustrer cette observation.

3.1.6 Exercice. (Voir exercice [EH], I-44) Soit k un corps. On note $X_1 = \text{Spec}(k[s])$ et $X_2 = \text{Spec}(k[t])$ deux copies de la droite affine, et $U_1 = D(s)$, $U_2 = D(t)$ les ouverts complémentaires de l'origine.

(1) On appelle *droite projective sur k* et on note $\mathbb{P}_k^1$ le recollement de X_1 et X_2 le long de l'isomorphisme $U_1 \simeq U_2$ donné par le morphisme d'anneaux $k[s, s^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $s \mapsto t^{-1}$. Ensemblistement, c'est une droite affine complétée par un point à l'infini. Montrez que $\Gamma(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}) = k$.

(2) On appelle *droite affine avec origine dédoublée* et on note D le recollement de X_1 et X_2 le long de l'isomorphisme $U_1 \simeq U_2$ donné par le morphisme d'anneaux $k[s, s^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $s \mapsto t$. Montrez que $\Gamma(D, \mathcal{O}_D) = k[s]$.

Table des matières

1	Contexte et motivation	2
1.1	Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres	2
1.2	Variétés algébriques classiques	2
1.3	L'idée des schémas	4
2	Définition des schémas	5
2.1	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	5
2.2	L'espace topologique d'un schéma affine	9
2.3	Interlude 1 : catégories et foncteurs	10
2.4	Interlude 2 : faisceaux	14
2.5	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	17
2.6	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	18
2.7	Définition des schémas et des morphismes de schémas	22
3	Recollements et produits fibrés	24
3.1	Recollement	24