

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 11 octobre 2016

Démonstration : Deuxième cas : seul S est affine. Choisissons des recouvrements ouverts affines $X = \cup X_i$ et $Y = \cup Y_k$ et notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$, $Y_{k,l} = Y_k \cap Y_l$. D'après le premier cas, les produits fibrés $Z_{i,k} := X_i \times_S Y_k$ existent. Notons $Z = Z_{i,j,k,l}$ le sous-schéma ouvert $p_1^{-1}(X_{i,j}) \cap p_2^{-1}(Y_{k,l})$ dans $Z_{i,k} = X_i \times_S Y_k$, où $p_1 : Z_{i,k} \rightarrow X_i$ et $p_2 : Z_{i,k} \rightarrow Y_k$ sont les projections. Utilisant la proposition 2.7.8, on vérifie immédiatement que Z possède la propriété universelle du produit fibré $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$. Ceci réalise ce produit fibré comme un ouvert de $Z_{i,k}$ et la même construction permet de le voir comme un ouvert de $Z_{i,l}$, $Z_{j,k}$ et $Z_{j,l}$. On peut alors recoller les schémas $Z_{i,k}$ le long des ouverts $Z_{i,j,k,l}$ pour former un schéma $X \times_S Y$. (Il s'agit d'un recollement ordinaire dans lequel l'ensemble d'indices de la famille de schémas à recoller est un produit cartésien de deux ensembles.) Vérifions que c'est bien le produit fibré attendu. Étant donnés $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $fu = gv$, on considère les ouverts $W_{i,k} = u^{-1}(X_i) \cap v^{-1}(Y_k)$ dans W . On construit des morphismes $W_{i,k} \rightarrow X_i \times_S Y_k$ qui se recollent en un morphisme $W \rightarrow X \times_S Y$.

Troisième cas : cas général. Soit $S = \cup S_i$ un recouvrement de S par des ouverts affines. Soient $X_i = f^{-1}(S_i)$ et $Y_i = g^{-1}(S_i)$ qui sont ouverts dans X et Y . Par restriction, on dispose de morphismes $f_i : X_i \rightarrow S_i$ et $g_i : Y_i \rightarrow S_i$. D'après le deuxième cas, les produits fibrés $X_i \times_{S_i} Y_i$ existent. Il n'est pas difficile de voir que les produits fibrés $X_{i,j} \times_{S_{i,j}} Y_{i,j}$ existent également et se réalisent comme des ouverts dans $X_i \times_{S_i} Y_i$ et dans $X_j \times_{S_j} Y_j$. Ces derniers se recollent donc pour former un schéma $X \times_S Y$ pour lequel on vérifie comme précédemment la propriété de produit fibré. $\square$

Observons que comme $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un objet terminal pour la catégorie des schémas (cf 3.3.3), en prenant $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ dans le théorème on obtient l'existence de produits absolus $X \times Y$ dans Sch .

Nous voici en mesure de définir l'espace affine relatif de dimension n , en termes de son foncteur de points comme dans le corollaire 3.3.4, puis de démontrer son existence comme schéma.

3.5.11 Proposition. *Soit S un schéma et n un entier. Il existe un S -schéma noté $\mathbb{A}_S^n$ et appelé espace affine relatif sur S de dimension n , muni de n fonctions régulières globales $t_1, \dots, t_n$, ayant la propriété universelle suivante : pour tout S -schéma T , l'application qui à un S -morphisme $f : T \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ associe le n -uplet de fonctions $(f^\sharp(t_1), \dots, f^\sharp(t_n))$ induit une bijection fonctorielle en T :*

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_S^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n.$$

Démonstration : Considérons $X := \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S$ vu comme un S -schéma à l'aide de la deuxième projection $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S \rightarrow S$. Il suffit de démontrer que X satisfait la propriété universelle annoncée. La propriété universelle du produit qui définit X fournit :

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S) = \{ \text{couples } (u : T \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n, v : T \rightarrow S) \text{ tels que } v = s_T \}$$

où $s_T : T \rightarrow S$ est le morphisme de structure qui fait de T un S -schéma. Ainsi v est entièrement déterminé par T , et on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n$$

d'après la propriété universelle de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. □

3.5.12 Exercice. Démontrez que si A est un anneau quelconque, on a $\mathbb{A}_A^n = \mathrm{Spec}(A[t_1, \dots, t_n])$. Démontrez que si S est un schéma quelconque, on peut construire $\mathbb{A}_S^n$ en choisissant un recouvrement de S par des ouverts affines $S_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ et en recollant les schémas $\mathbb{A}_{A_i}^n$ le long d'isomorphismes convenables (et dont l'existence est donnée par une certaine propriété universelle).

3.5.13 Exercice. Soient X/S et Y/S deux S -schémas. Montrez qu'il existe une application naturelle $|X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ et qu'elle est surjective.

3.5.14 Exercice. Soit S un schéma et $S' \rightarrow S$ un morphisme.

- (1) Définissez un foncteur *changement de base* $\mathrm{Sch}/S \rightarrow \mathrm{Sch}/S'$, $X \mapsto X_{S'} := X \times_S S'$.
- (2) Montrez que le composé des changements de base par $S' \rightarrow S$ et $S'' \rightarrow S'$ est isomorphe au changement de base par $S'' \rightarrow S \rightarrow S$.
- (2) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. Montrez que si f est une immersion ouverte, alors pour tout $S' \rightarrow S$, le morphisme $f_{S'} : X_{S'} \rightarrow Y_{S'}$ est une immersion ouverte. On dit que la propriété d'être une immersion est *stable par changement de base*.

3.5.15 Fibres, intersections, diagonales, égalisateurs. L'existence de produits fibrés de schémas a pour conséquence que certains objets habituels en géométrie ont un sens naturel comme schémas. Nous donnons quatre exemples.

- (1) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $y \in Y$ un point vu comme un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \rightarrow Y$, cf 3.2.3. La *fibre de f en y* , notée $f^{-1}(y)$ ou X_y , est par définition le schéma $X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$.
- (2) Soient Y, Z deux sous-schémas ouverts d'un schéma X . L'*intersection de Y et Z dans X* , notée $Y \cap Z$, est par définition le schéma $Y \times_X Z$. (Nous n'avons défini pour l'instant que les sous-schémas ouverts mais cette définition sera valable également pour les sous-schémas fermés ou localement fermés.)
- (3) Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. La *diagonale relative de X/S* ou *diagonale du S -schéma X* est par définition le morphisme $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ dont les deux composantes sont $\mathrm{id} : X \rightarrow X$.
- (4) Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux morphismes de schémas de mêmes source et but. Soit $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ le morphisme de composantes f et g . Soit $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$ la diagonale de Y . L'*égalisateur de f et g* est par définition le schéma $X \times_{(f,g), Y \times Y, \Delta} Y$.

3.5.16 Exercice. (1) On considère le morphisme d'élévation à la puissance n -ième dans la droite affine complexe, plus précisément le morphisme $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ donné par le morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$ qui envoie t sur t^n . Calculez la fibre au sens des schémas au-dessus d'un point fermé.

(2) Dans le plan affine complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, calculez l'intersection au sens des schémas de la parabole d'équation $y = x^2$ et d'une droite horizontale d'équation $y = a$, $a \in \mathbb{C}$.

(3) Calculez la diagonale relative du $\mathbb{C}$ -schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$. Calculez la diagonale relative de l'immersion ouverte donnée par un ouvert affine principal $D(f) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$. Montrez que la diagonale relative d'un monomorphisme de schémas est un isomorphisme.

4 Modules sur les schémas

Le foncteur Spectre permet de plonger la catégorie des anneaux dans celle des schémas. De même, on peut plonger la catégorie des modules sur un anneau dans une catégorie de modules sur les schémas, et les modules sur les schémas jouent un rôle aussi fondamental que le rôle joué par les modules sur les anneaux.

4.1 Modules sur les espaces annelés

4.1.1 Noyaux, images, quotients, etc. Dans la présentation des faisceaux, pour simplifier nous avons surtout considéré le cas de faisceaux d'*ensembles*. Ce que nous avons dit était aussi valable pour des faisceaux de groupes abéliens ou d'anneaux. Certaines constructions de la catégorie des groupes ou de la catégorie des anneaux (comme les noyaux, images, quotients) ont un analogue pour les faisceaux. L'idée générale est la suivante : on définit un préfaisceau en appliquant cette construction pour chaque ouvert U , puis on passe au faisceau associé si nécessaire. Voici quelques exemples. On fixe un espace topologique X .

(**produit**) Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de faisceaux. Le préfaisceau $\mathcal{P}$ défini par $\mathcal{P}(U) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ est un faisceau. On l'appelle le *faisceau produit* des $\mathcal{F}_i$ et on le note $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(**somme**) Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de faisceaux de groupes abéliens. Le préfaisceau $\mathcal{S}_0$ défini par $\mathcal{S}_0(U) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ n'est pas un faisceau en général. On note $\mathcal{S}$ le faisceau associé, on l'appelle le *faisceau somme directe* des $\mathcal{F}_i$ et on le note $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(**noyau**) Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Le préfaisceau $\mathcal{K}$ défini par $\mathcal{K}(U) = \ker(\varphi(U))$ est un faisceau. On l'appelle le *noyau de φ* et on le note $\ker(\varphi)$.

(**image**) le préfaisceau $\mathcal{I}_0$ défini par $\mathcal{I}_0(U) = \text{im}(\varphi(U))$ n'est pas un faisceau en général. On note $\mathcal{I}$ le faisceau associé à $\mathcal{I}_0$, on l'appelle l'*image de φ* et on le note $\text{im}(\varphi)$.

(**conoyau**) le préfaisceau $\mathcal{C}_0$ défini par $\mathcal{C}_0(U) = \text{coker}(\varphi(U))$ n'est pas un faisceau en général. On note $\mathcal{C}$ le faisceau associé à $\mathcal{C}_0$, on l'appelle le *conoyau de φ* et on le note $\text{coker}(\varphi)$.

Dans la suite, il arrivera que certaines constructions du même genre apparaissent sans être détaillées explicitement, dans le cas de faisceaux de groupes, d'anneaux, de modules, d'idéaux...

Passons maintenant aux modules. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

4.1.2 Définition. On appelle *faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules* ou simplement *$\mathcal{O}_X$ -module* un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X muni d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ satisfaisant les axiomes d'un module sur un anneau. Autrement dit, pour tout ouvert $U \subset X$ le groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module de telle sorte que la loi externe pour les applications de restriction $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est compatible aux applications $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$, pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$. Un *morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules* est un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varphi(U)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules pour tout U . On note $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules.

Le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules est un $\mathcal{O}_X$ -module. La notion de sous-module est immédiate. Le quotient d'un $\mathcal{O}_X$ -module par un sous- $\mathcal{O}_X$ -module est un $\mathcal{O}_X$ -module. Une somme directe, ou un produit direct de $\mathcal{O}_X$ -modules est un $\mathcal{O}_X$ -module.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux $\mathcal{O}_X$ -modules, alors le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ est un $\mathcal{O}_X$ -module appelé *produit tensoriel de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$* et noté $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. Le préfaisceau $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ des morphismes locaux entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules appelé *faisceau des morphismes entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$* et noté $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Pour un ouvert $U \subset X$ fixé (par exemple $U = X$), on prendra garde de ne pas confondre les objets suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) &\text{ qui est un faisceau,} \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) &\text{ qui est un ensemble de morphismes de faisceaux,} \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) &\text{ qui est un ensemble de morphismes de modules.} \end{aligned}$$

Les deux premiers sont reliés par le fait que $\Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Les deux derniers sont reliés par le morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)). \\ \varphi &\longmapsto \varphi(U) \end{aligned}$$

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$ -module, le faisceau $f_*\mathcal{F}$ est naturellement un $f_*\mathcal{O}_X$ -module et le morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ permet de le voir comme un $\mathcal{O}_Y$ -module. Si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$ -module, le faisceau $f^{-1}\mathcal{G}$ est naturellement un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module. Le morphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ déduit de $f^\sharp$ par adjonction permet de définir le $\mathcal{O}_X$ -module $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. On a ainsi défini des foncteurs image directe $f_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ et image inverse $f^* : \text{Mod}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$.

4.1.3 Proposition (Adjonction (f^*, f_*)). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Alors on a une bijection canonique, fonctorielle en $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X)$ et $\mathcal{G} \in \text{Mod}(Y)$:

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Mod}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Démonstration : Exercice. Indication : utiliser l'adjonction (f^{-1}, f_*) des faisceaux. □

4.1.4 Exercice. Soient X un schéma et $x \in |X|$ un point vu comme un morphisme $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$ où $k = \kappa(x)$ est le corps résiduel. On s'intéresse aux adjonctions (x^{-1}, x_*) entre catégories de faisceaux d'ensembles, et (x^*, x_*) entre catégories de faisceaux de modules.

- (1) Décrivez les foncteurs $x_* : F(\text{Spec}(k)) \rightarrow F(X)$ lorsque F est la catégorie des faisceaux d'ensembles ou de groupes abéliens. Décrivez le foncteur $x_* : \text{Mod}(\text{Spec}(k)) \rightarrow \text{Mod}(X)$. Dans tous les cas on appelle $x_* \mathcal{F}$ un *faisceau gratte-ciel* en x .
- (2) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles ou de groupes abéliens sur X . Montrez que l'image inverse $x^{-1} \mathcal{F}$ est (le faisceau sur $\text{Spec}(k)$ associé à) la fibre $\mathcal{F}_x$.
- (2) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules. Décrivez l'image inverse $x^* \mathcal{F}$. Le k -espace vectoriel $\mathcal{F}(x) = \Gamma(\text{Spec}(k), x^* \mathcal{F})$ est encore appelé *fibre de $\mathcal{F}$ en x* .

4.2 Modules quasi-cohérents sur les schémas

Pour tout anneau A , un module M définit un $\mathcal{O}_X$ -module sur $X = \text{Spec}(A)$ par le même procédé naturel que celui qui nous a permis de définir le faisceau de fonctions $\mathcal{O}_X$. Pour tout $f \in A$, on note classiquement $M[1/f]$ ou M_f le localisé de M par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. C'est un A_f -module.

4.2.1 Proposition. *Sur $X = \text{Spec}(A)$, les données suivantes :*

- (1) $\mathcal{F}(D(f)) = M_f$ pour tout $f \in A$,
- (2) $\text{res}_{D(g), D(f)} : M_g \rightarrow M_f$ égal à l'application naturelle, pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$,

définissent un $\mathcal{B}$ -faisceau. On note $\widetilde{M}$ le faisceau qu'il détermine. La fibre de ce faisceau en un point $x = [p]$ est le A_p -module $\mathcal{F} = M_p$. Tout morphisme de A -modules $u : M \rightarrow N$ définit un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widetilde{u} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$.

Démonstration : La preuve est la même que celle de 2.5.1. □

4.2.2 Proposition. *Soit A un anneau et M, N deux A -modules. Les applications*

$$\text{Hom}_A(M, N) \xrightleftharpoons[\Gamma]{u \mapsto \widetilde{u}} \text{Hom}_X(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre. De

Démonstration : Soit $u : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules et $\varphi = \widetilde{u}$. L'égalité $u = \Gamma(\varphi)$ découle de la définition. Soit $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules et $u = \Gamma(\varphi) = \varphi(X)$. Par compatibilité de φ aux restrictions, pour tout ouvert principal $U = D(f)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi(X)} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \xrightarrow{\varphi(U)} & N_f. \end{array}$$

Ceci montre que $\varphi(U)(m) = u(m)$ pour tout $m \in M$. Comme $\varphi(U)$ est un morphisme de A_f -modules, on a alors $\varphi(U)(m/f^n) = u(m)/f^n$ pour tous $m \in M, n \geq 0$. Ceci montre que $\varphi = \widetilde{u}$. □

4.2.3 Proposition. Si $\cdots \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow \cdots$ est une suite exacte de A -modules, alors $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules, où $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ etc. En particulier, le foncteur tilde préserve les noyaux, les conoyaux et les images : le noyau du tilde est le tilde du noyau, etc.

Démonstration : Soit $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{v} M'' \rightarrow \cdots$ une suite exacte de A -modules. Soit $x = [p]$ un point de X . Comme la localisation des modules par rapport à une partie multiplicative est un foncteur exact (voir [Mat], th. 4.5), on déduit une suite exacte $\cdots \rightarrow M_p \rightarrow M'_p \rightarrow M''_p \rightarrow \cdots$. Comme $M_p = \mathcal{F}_x$, cette suite se réécrit $\cdots \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{u} \mathcal{F}'_x \xrightarrow{v} \mathcal{F}''_x \rightarrow \cdots$. Or le germe en un point du noyau d'un morphisme de faisceaux de modules est le noyau du morphisme sur les germes, en symboles : $\ker(\varphi_x) = \ker(\varphi)_x$ pour un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. La même propriété vaut pour les images de morphismes. Il s'ensuit que l'inclusion de faisceaux $\mathrm{im}(u) \rightarrow \ker(v)$ est un isomorphisme sur les fibres, donc un isomorphisme, donc la suite $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$ est exacte. $\square$

4.2.4 Remarque. Considérons deux catégories C, D où la notion de suite exacte a un sens. Si un foncteur $F : C \rightarrow D$ transforme suites exactes en suites exactes, on dit que c'est un foncteur *exact*. Comme toute suite exacte $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{u'} M'' \xrightarrow{u''} \cdots$ peut être décomposée en suites exactes courtes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker(u) \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{im}(u) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \ker(u') \longrightarrow M' \longrightarrow \mathrm{im}(u') \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \ker(u'') \longrightarrow M'' \longrightarrow \mathrm{im}(u'') \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

il suffit de montrer que F transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.

4.2.5 Exercice. Soit A un anneau et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Montrez que le foncteur tilde préserve les sommes directes arbitraires.

Table des matières

1	Contexte et motivation	2
1.1	Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres	2
1.2	Variétés algébriques classiques	2
1.3	L'idée des schémas	4
2	Définition des schémas	5
2.1	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	5
2.2	L'espace topologique d'un schéma affine	9
2.3	Interlude 1 : catégories et foncteurs	10
2.4	Interlude 2 : faisceaux	14
2.5	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	17
2.6	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	18
2.7	Définition des schémas et des morphismes de schémas	22