

Introduction à la Géométrie Algébrique. Le langage des schémas

Cours du 18 octobre 2016

Sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, les $\mathcal{O}_X$ -modules qui sont intéressants en géométrie algébrique sont les modules $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ définis par un module sur un anneau. Tous ne sont pas de cette forme :

4.2.6 Exemple. Soit A un anneau de valuation discrète, comme le localisé de $\mathbb{Z}$ en un idéal premier (p) , ou un localisé d'un anneau de polynômes $k[x]$ en un idéal premier (f) , ou l'anneau des entiers p -adiques, ou un anneau de séries formelles à une variable $k[[x]]$ (avec k un corps). L'espace topologique $X = \text{Spec}(A)$ possède deux points, un point fermé correspondant à l'idéal maximal m et un point ouvert η correspondant à l'idéal premier (0) . Notons $U = \{\eta\}$. On définit un sousfaisceau $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ en posant $\mathcal{J}(X) = 0$ et $\mathcal{J}(U) = \mathcal{O}_X(U) = \text{Frac}(A)$. S'il existe un A -module M tel que $\mathcal{J} = \widetilde{M}$, on a $M = \Gamma(X, \widetilde{M}) = \Gamma(X, \mathcal{J}) = 0$ donc $\mathcal{J} = \widetilde{M} = 0$, contradiction.

Or les A -modules vérifient une propriété qui, bien que stupide, se transfère du côté des $\mathcal{O}_X$ -modules en une propriété qui ne l'est pas : ils sont engendrés par leurs éléments. Plus précisément, ils peuvent être définis par générateurs et relations, ce qui signifie que pour tout A -module M il existe une suite exacte :

$$A^{(J)} \longrightarrow A^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $A^{(I)}, A^{(J)}$ sont les modules libres sur des ensembles de base I, J . Par exemple, si $A = k[x, y]$ et $M = k[x, y]/(f, g)$ où $f, g \in A$ sont deux polynômes, alors M possède la présentation

$$A^2 \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

où u est l'application A -linéaire de matrice $\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} \in M_{1,2}(A)$, c'est-à-dire $u(a, b) = af + bg$ et v est le morphisme de quotient. Une autre manière de le dire est que tout module est conoyau d'un morphisme entre modules libres. Ceci implique que sur $X = \text{Spec}(A)$, le module $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ peut être défini par générateurs et relations. C'est cette propriété qui est à l'origine de la définition des modules quasi-cohérents.

4.2.7 Définition. Soit X un espace annelé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$ -module est *quasi-cohérent* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U sur lequel $\mathcal{F}|_U$ peut être défini par générateurs et relations, i.e. il existe une suite exacte $\mathcal{O}_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$. On note $\text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents.

Le fait que ce soit une bonne notion dans le cadre des schémas sera confirmé par la propriété que sur un schéma affine, tout module quasi-cohérent est de la forme $\widetilde{M}$. Nous allons démontrer ceci et en même temps quelques compléments.

4.2.8 Théorème. Soient X un schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ il existe un A -module M tel que $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$.
- (2) Il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ et des A_i -modules M_i tels que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.
- (3) Le $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$ est quasi-coherent.
- (4) Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ et pour tout $f \in A$, le morphisme $\Gamma(U, \mathcal{F})_f \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Démonstration : D'abord un commentaire sur le point (4) : le morphisme proposé provient du morphisme de restriction $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ via la propriété universelle, puisque clairement l'élément f induit sur le module $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$ un morphisme bijectif. Nous passons à la démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) est clair.

(2) $\Rightarrow$ (3). Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ tel que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$ pour tout i . Soit $A_i^{(J)} \rightarrow A_i^{(I)} \rightarrow M_i \rightarrow 0$ une présentation de M_i . Comme le foncteur tilde : $\text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact (proposition 4.2.3) et préserve les sommes directes (exercice 4.2.5), on en déduit que la suite $\mathcal{O}_{U_i}^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow 0$ est exacte, donc $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent.

(3) $\Rightarrow$ (4). Si $\mathcal{F}|_U$ est de la forme $\widetilde{M}$, les deux membres sont égaux à M_f et l'énoncé est clair. Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Quitte à changer X en U , on peut supposer $U = X = \text{Spec}(A)$ affine. Par l'hypothèse (3) il existe un recouvrement ouvert par des ouverts (que l'on peut supposer) principaux $U_i = D(f_i)$ et des présentations par générateurs et relations :

$$\widetilde{A}_{f_i}^{(J)} \xrightarrow{\widetilde{u}_i} \widetilde{A}_{f_i}^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0.$$

Comme X est quasi-compact, on peut supposer les U_i en nombre fini. Comme le foncteur tilde est pleinement fidèle (prop. 4.2.2), chaque morphisme $\widetilde{u}_i$ est défini par un certain morphisme de A_{f_i} -modules $u_i : A_{f_i}^{(J)} \rightarrow A_{f_i}^{(I)}$. Comme tilde préserve les conoyaux (voir 4.2.3), on en déduit que $\mathcal{F}|_{U_i} = \text{coker}(\widetilde{u}_i) = \text{coker}(u_i)^\sim$. Compte tenu de notre observation initiale ceci montre que $\mathcal{F}|_{U_i}$ vérifie la propriété (4) attendue. Le même argument montre que les restrictions de $\mathcal{F}$ aux ouverts $U_i \cap U_j = D(f_i f_j)$ vérifient la propriété (4). Nous allons conclure en utilisant la propriété de faisceau. Celle-ci affirme que l'on a une suite exacte $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$. Comme les ensembles d'indices des produits sont *finis*, le morphisme naturel $(\prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}))_f \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f$ est un isomorphisme ainsi que son analogue sur les $U_i \cap U_j$. On peut donc localiser en f cette suite exacte, ce qui donne le premier rang du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})_f \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(D(f), \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(D(f) \cap U_i, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(D(f) \cap U_i \cap U_j, \mathcal{F}) \end{array}$$

D'après ce que nous avons démontré auparavant, les applications β et γ sont des isomorphismes. L'application α identifie alors $\ker(\beta)$ et $\ker(\gamma)$, d'où (4).

(4) $\Rightarrow$ (1). Posons $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$. La restriction des sections induit un morphisme de $\mathcal{O}_U$ -modules $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}|_U$. La propriété (4) affirme que c'est un isomorphisme sur tous les ouverts principaux $D(f) \subset U$, c'est donc un isomorphisme de faisceaux. $\square$

4.2.9 Corollaire. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. Les foncteurs

$$\text{Mod}(A) \xrightleftharpoons[\Gamma]{M \mapsto \widetilde{M}} \text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$$

sont des équivalences de catégories exactes, quasi-inverses l'une de l'autre.

On renvoie à 2.3.11 pour un rappel sur la notion de quasi-inverse.

Démonstration : Le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est pleinement fidèle par 4.2.2 et essentiellement surjectif par 4.2.8. Il est clair que $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ est un quasi-inverse. Nous avons déjà vu que $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact. Un résultat général de théorie des catégories dit qu'un quasi-inverse d'un foncteur exact est exact, mais démontrons tout de même directement que Γ est exact. Soit donc $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents. Notons $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, etc. On voit directement en utilisant les définitions que la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$ est exacte. Notons $Q = M/M'$, on a donc une injection $Q \hookrightarrow M''$. Montrons que le module $C = M''/Q$ est nul. Pour tout $x = [p] \in X$, la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x \rightarrow 0$ est exacte. Puisque $\mathcal{F}_x = M_p$ (etc.), ce implique que $Q_p \rightarrow M''_p$ est un isomorphisme, et ceci pour tout p . Alors $C_p = (M''/Q)_p \simeq M''_p/Q_p = 0$ pour tout p . Mais un module C dont tous les localisés C_p sont nuls est nul (car si $x \in C$ est non nul, son annulateur $\text{Ann}(x)$ est un idéal distinct de A , donc inclus dans un idéal maximal p , et x reste non nul dans C_p . Voir [Mat], th. 4.6). Nous avons montré que $C = 0$, donc $Q \rightarrow M''$ est un isomorphisme et la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est exacte. $\square$

4.2.10 Corollaire. Soit X un schéma. Alors le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents sont quasi-cohérents.

Démonstration : Ces propriétés sont locales sur X donc on peut supposer que X est affine. Dans ce cas le résultat provient des équivalences de catégories exactes de 4.2.9. $\square$

4.2.11 Proposition. Soient $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ deux schémas affines et $f : Y \rightarrow X$ le morphisme défini par un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$.

- (1) Si N est un B -module, ${}_A N$ est N vu comme A -module via φ , et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, alors $f_* \mathcal{G} = \widetilde{{}_A N}$.
- (2) Si M est un A -module et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, alors $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Démonstration : On utilisera librement le fait suivant : si $s \in A$ et $U = D(s) \subset X$ est un ouvert principal, alors $f^{-1}(U) = D(s \cdot 1_B) = D(s)$. On notera parfois $D_X(s) \subset X$ et $D_Y(s) \subset Y$ pour distinguer ces deux objets.

- (1) Il suffit de montrer l'égalité des modules de sections sur un ouvert principal $U = D_X(s)$. Or $(f_* \mathcal{G})(D(s)) = \mathcal{G}(f^{-1}(D(s))) = \mathcal{G}(D(s)) = N_s = ({}_A N)_s$ ce qui est licite puisque $s \in A$.
- (2) Nous utiliserons le fait suivant, qui est un raffinement de 4.2.2 et que l'on prouve de la même manière : $(\star)$ si $X = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont deux faisceaux de $\mathcal{O}_X$ -modules avec $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ quasi-cohérent, alors l'application $\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{G}))$, qui envoie un morphisme de faisceaux φ sur le morphisme $\varphi(X)$, est une bijection (fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$).

Revenons aux notations de la proposition. Pour tout $\mathcal{O}_Y$ -module $\mathcal{G}$, notons $N = \Gamma(Y, \mathcal{G})$ qui est un B -module, et ${}_A N$ qui est N vu comme A -module. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G}) \text{ par adjonction,} \\ &= \mathrm{Hom}_A(M, {}_A N) \text{ d'après } (\star), \\ &= \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \text{ d'après [Mat], App. A, formula 9 avec } P = B, \\ &= \mathrm{Hom}_A(\widetilde{M \otimes_A B}, \mathcal{G}) \text{ d'après } (\star). \end{aligned}$$

Comme ces égalités sont des isomorphismes fonctoriels en $\mathcal{G}$, le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme canonique $f^* \mathcal{F} \simeq \widetilde{M \otimes_A B}$. $\square$

4.2.12 Remarque. On peut essayer de démontrer la formule $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$ directement en calculant $f^* \mathcal{F}$ à l'aide des définitions. Hartshorne (chap. II, prop. 5.2) dit que c'est immédiat, et je n'en suis pas aussi sûr... Voici comment faire ce calcul par étapes.

Étape 1. Le faisceau $f^* \mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau défini par :

$$\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V)$$

où apparaît la composée $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{f^\#} \mathcal{O}_Y(f^{-1}U) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{O}_Y(V)$. En effet, on dispose d'un morphisme naturel $\mathcal{P} \rightarrow f^* \mathcal{F}$ qui est un isomorphisme sur les fibres en $y \in Y$, toutes deux naturellement isomorphes à $\mathcal{F}_{f(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X, f(y)}} \mathcal{O}_{Y, y}$, voir 2.6.4. Dans la suite on pose $\mathcal{H} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Étape 2. Il suffit de construire un isomorphisme de $\mathcal{B}$ -préfaisceaux $\mathcal{P} \simeq \mathcal{H}$ i.e. des isomorphismes $\mathcal{P}(V) \simeq \mathcal{H}(V)$ fonctoriels en l'ouvert principal $V = D(s)$, $s \in B$. En effet, si on dispose d'un tel isomorphisme, alors $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{B}$ -faisceau donc le faisceau qui lui est associé est égal à $\mathcal{H}$.

Étape 3. Dans le calcul de la limite inductive qui définit $\mathcal{P}(V)$ avec V principal, nous pouvons nous limiter aux ouverts U qui sont quasi-compacts, i.e. réunions *finies* $U = D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ avec $s_1, \dots, s_r \in A$. En effet, il est équivalent de dire que $U \supset f(V)$ ou que $f^{-1}(U) \supset V$. En recouvrant U par des ouverts principaux $D(s_i)$ et en utilisant la quasi-compacité de V , on voit que U contient un ouvert quasi-compact $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ qui recouvre $f(V)$. Dans la suite, pour tout uplet $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$, nous noterons $D(\underline{s}) := D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ et $M_{\underline{s}} := \mathcal{F}(D(\underline{s})) = \ker(\prod_i M_{s_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} M_{s_i s_j})$. On prendra garde au fait que $D(\underline{s})$ n'est pas nécessairement principal.

Étape 4. Pour tout ouvert quasi-compact $U = D(\underline{s}) \supset f(V)$ où $V = D(t)$, on a :

$$\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) = (M \otimes_A B)_t.$$

En effet, $U \supset f(V) \iff f^{-1}(U) \supset V \iff D(t) \subset f^{-1}(D(\underline{s})) = D(\underline{s} \cdot 1_B) \iff V(s_1, \dots, s_r) \subset V(t)$ où la dernière équivalence est obtenue par passage au complémentaire. Ceci est équivalent à dire que $t \in \sqrt{J}$ où $J := s_1 B + \dots + s_r B$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t^N \in J$. On voit qu'en passant au localisé B_t , les s_i engendrent l'idéal unité de B_t . En considérant une partition de l'unité associée, on voit comme dans la preuve de 2.5.1 que le morphisme $M \otimes_A B_t \rightarrow M_{\underline{s}} \otimes_{A_{\underline{s}}} B_t$

induit par le morphisme $M \rightarrow M_{\underline{s}}$ est un isomorphisme. Comme $M \otimes_A B_t = (M \otimes_A B)_t$, on obtient le résultat annoncé.

Étape 5. On peut conclure le calcul :

$$\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U=D(\underline{s}) \supset f(V)} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) = \varinjlim_{U=D(\underline{s}) \supset f(V)} (M \otimes_A B)_t = (M \otimes_A B)_t = \mathcal{H}(V).$$

4.3 Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas

Nous passons maintenant à la définition des sous-schémas fermés. Cette définition doit satisfaire la contrainte naturelle suivante : si $X = \operatorname{Spec}(A)$, les sous-schémas fermés sont les schémas de la forme $V(I) = \operatorname{Spec}(A/I)$, associés aux idéaux $I \subset A$. On veut que des idéaux différents donnent lieu à des sous-schémas différents, pour pouvoir (par exemple) distinguer dans le plan affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$: d'une part l'origine $\{0\}$ définie par l'idéal (x, y) et d'autre part l'intersection schématique de la parabole $\{y = x^2\}$ avec la droite $\{y = 0\}$, définie par l'idéal (y, x^2) . (On renvoie à 1.3 pour cette discussion.) Voici la notion « globale ».

4.3.1 Définition. Soit X un schéma. On appelle *idéal quasi-cohérent sur X* un sous- $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$.

4.3.2 Lemme. Soit X un schéma et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$. Notons :

$$Y = \{x \in X ; \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \text{ muni de la topologie induite de celle de } X, \text{ et } \\ \mathcal{O}_Y = i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \text{ où } i : Y \rightarrow X \text{ est l'inclusion.}$$

Alors Y est fermé dans X et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un schéma que l'on note $V(\mathcal{I})$. Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $\mathcal{I} = \tilde{I}$, alors $(Y, \mathcal{O}_Y) = \operatorname{Spec}(A/I)$.

Démonstration : Les assertions à démontrer sont locales sur X , donc quitte à se restreindre à un ouvert affine on peut supposer que X est affine. En d'autres termes, seule la dernière phrase est à démontrer. On a $Y = \{x = [p] ; I_p \neq A_p\} = \{x = [p] ; I_p \subset pA_p\} = \{x = [p] ; I \subset p\}$ qui est égal au fermé $V(I)$ comme sous-espace de X . Sur ce fermé, notons $\mathcal{Q}_Y = A/I$ le faisceau de $\mathcal{O}_Y$ -modules obtenu par l'opération tilde sur $Y = \operatorname{Spec}(A/I)$. Notons $\mathcal{Q}_X = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ qui est un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules. D'après 4.2.9 et 4.2.10, le faisceau $\mathcal{Q}_X$ est quasi-cohérent, égal à au faisceau $\widetilde{A/I}$ obtenu par l'opération tilde sur $X = \operatorname{Spec}(A)$. (Ici A/I est vu comme A -module.) Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $i^{-1}\mathcal{Q}_X = \mathcal{Q}_Y$. La stratégie est semblable à celle de la remarque 4.2.12.

Étape 1. Le faisceau $i^{-1}\mathcal{Q}_X$ est associé au préfaisceau $\mathcal{P}$ défini par $\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U \supset V} \mathcal{Q}_X(U)$ pour V ouvert de Y , où la limite est sur les ouverts U de X contenant V .

Étape 2. Il suffit de démontrer que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{Q}_Y(Y)$. En effet, on sait qu'il suffit de montrer que $\mathcal{P}(V) = \mathcal{Q}_Y(V)$ pour tous les ouverts principaux $V \subset Y$, car dans ce cas $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{B}$ -faisceau de faisceau associé $\mathcal{Q}_Y$, comme souhaité. Or un ouvert principal de Y est de la forme $V = D_Y(g) = \operatorname{Spec}((A/I)_g)$ où l'on identifie un élément $g \in A$ et son image dans A/I . Comme $(A/I)_g = A_g/I_g$, on voit que quitte à remplacer X par $X' = D_X(g)$ et Y par $Y' = D_Y(g) = Y \cap D_X(g)$, on se ramène à démontrer que $\mathcal{P}(V) = \mathcal{Q}_Y(V)$ lorsque $V = Y$.

Étape 3. On peut se limiter dans la limite inductive aux ouverts quasi-compacts $U = D(\underline{s}) := D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ un uplet d'éléments de A . En effet, on peut toujours

recouvrir un ouvert $U \supset Y$ par des ouverts principaux $D(s_i)$ et en utilisant la quasi-compacité de Y , on voit que U contient un ouvert quasi-compact $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ qui recouvre Y .

Étape 4. Fin du calcul. On observe que $D(\underline{s}) \supset Y$ si et seulement si $D(\underline{s} \cdot 1_{A/I}) = D(\underline{s}) \cap Y = Y$ ce qui signifie que l'idéal engendré par $\underline{s}$ dans A/I est l'idéal unité. En utilisant une partition de l'unité pour les s_i dans A/I , on montre comme dans la preuve de 2.5.1 que le morphisme $A/I \rightarrow \mathcal{Q}_X(D(\underline{s})) = \ker(\prod_i (A/I)_{s_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} (A/I)_{s_i s_j})$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}(Y) = \varinjlim_{D(\underline{s}) \supset Y} \mathcal{Q}_X(D(\underline{s})) = \varinjlim_{D(\underline{s}) \supset Y} A/I = A/I = \mathcal{Q}_Y(Y).$$

On a terminé. □

4.3.3 Définition. On appelle *sous-schéma fermé* de X le schéma $V(\mathcal{J})$ défini par un idéal quasi-cohérent $\mathcal{J}$ dans le lemme précédent. Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma fermé dans X .

4.3.4 Définition. Un *sous-schéma* de X est un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert de X . La terminologie *sous-schéma localement fermé* est parfois utilisée aussi. Une *immersion* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma Z dans X .

4.3.5 Exercice. Montrez qu'un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé de X est un sous-schéma de X . Déduisez-en qu'un sous-schéma d'un sous-schéma de X est un sous-schéma de X , et que la composée de deux immersions est une immersion. *Commentaire :* très souvent, un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé, mais il existe des exemples (un peu pathologiques) où ce n'est pas le cas (et la lectrice curieuse peut trouver un exemple ici). C'est pour cela que la définition de sous-schéma est ainsi faite.

4.3.6 Exercice. Montrez qu'une immersion est un monomorphisme de schémas. (Traitez séparément les immersions fermées et les immersions ouvertes.)

4.3.7 Sous-schémas de support donné. Nous avons vu qu'un sous-schéma ouvert $U \subset X$ est déterminé par son support. La situation est très différente pour les sous-schémas fermés $Y \subset X$. Plus précisément, dans le cas affine on a les conditions équivalentes :

- (1) $Y = V(I) = V(J)$ ensemblistement,
- (2) pour $p \in A$ premier, $p \supset I \iff p \supset J$,
- (3) $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

En revanche, l'égalité des *sous-schémas* $Y = V(I)$ et $Z = V(J)$ implique :

$$I = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) = J.$$

(Notez qu'un morphisme de schémas $f : V \rightarrow W$ induit un morphisme d'anneaux $\Gamma(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ obtenu en prenant les sections globales dans le comorphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_W \rightarrow f_*\mathcal{O}_V$.) En particulier, les idéaux I^n pour $n \geq 1$ définissent des sous-schémas fermés de même support ; il en va de même pour deux idéaux I, J tels que $I^n \subset J \subset I^m$ pour $m, n \geq 1$. Ceci est lié au fait que si on ne se souvient d'une fonction régulière $f \in A$ que ses valeurs $\{f(x) \in \kappa(x), x \in X\}$, alors l'annulation des $f(x)^n$ est équivalente à celle des $f(x)^m$. La fonction elle-même, information plus subtile que la collection de ses valeurs, diffère.

4.3.8 Exercice. Soit $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ la droite affine sur un corps et $x = \{t = 0\}$ l'origine. Trouvez tous les sous-schémas fermés de support $\{x\}$. Pour chaque tel sous-schéma $i : Y \hookrightarrow X$, et chaque fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, décrivez ce que signifie l'annulation de f sur Y .

4.3.9 Exercice. (1) Dans un espace topologique X , soit Z une partie localement fermée i.e. une partie qui est intersection d'un ouvert et d'un fermé. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires composées d'un fermé F et d'un ouvert U tels que $Z = F \cap U$.

- (i) Montrez que l'adhérence $F_{\min} = \overline{Z}$ est le plus petit fermé F qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (ii) Montrez que la frontière $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ est fermée dans X et que $U_{\max} = X \setminus \partial Z$ est le plus grand ouvert U qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (iii) Montrez que pour tout $(F, U) \in \mathcal{E}$ on a $Z = F \cap U = F_{\min} \cap U = F \cap U_{\max}$. En particulier $(F_{\min}, U_{\max})$ appartient à $\mathcal{E}$.

(2) Soit $Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma et $f : Z \rightarrow X$ le morphisme d'immersion. Soit $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ et $U = X \setminus \partial Z$. Montrez que Z est un sous-schéma fermé de U . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) f est une immersion fermée, (ii) $U = X$, (iii) $|Z|$ est fermé dans $|X|$.

4.4 Algèbres quasi-cohérentes

4.4.1 Définition. Soit S un schéma. On appelle *faisceau d'algèbres sur S* ou $\mathcal{O}_S$ -*algèbre* un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur S muni d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{A}$. On appelle $\mathcal{O}_S$ -*algèbre quasi-cohérente* un faisceau d'algèbres qui est quasi-cohérent comme faisceau de modules.

Par exemple, si $f : X \rightarrow S$ est un S -schéma, alors $\mathcal{A}(X) := f_*\mathcal{O}_X$ est naturellement une $\mathcal{O}_S$ -algèbre à l'aide du morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_S \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. De plus, si $g : Y \rightarrow S$ est un second S -schéma et $h : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, le morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow h_*\mathcal{O}_X$ fournit par application de g_* un morphisme $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$. On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathcal{A} : \text{Sch}/S \rightarrow \{\mathcal{O}_S\text{-algèbres}\}$. On peut montrer que sous des conditions assez faibles sur f (par ex. quasi-compacité plus séparation), l'algèbre $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente. Ce résultat implique par exemple que si X est un sous-schéma fermé d'un espace affine $\mathbb{A}_S^n$ ou d'un espace projectif $\mathbb{P}_S^n$, alors $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente.

4.4.2 Exercice. Montrez que sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, le produit tensoriel de deux modules quasi-cohérents $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ est le module $\widetilde{M \otimes_A N}$. Déduez-en que $B \mapsto \widetilde{B}$ définit une équivalence entre la catégorie des A -algèbres et la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes.

4.4.3 Proposition. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre quasi-cohérente sur S . Alors il existe un S -schéma $Y = \text{Spec}(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{A}$ avec la propriété universelle suivante : le foncteur $\mathcal{A}$ induit une bijection

$$\text{Hom}_S(X, \text{Spec}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X))$$

fonctorielle en X et en $\mathcal{A}$.

Démonstration : Si $S = \text{Spec}(R)$ est affine, on a $\mathcal{A} = \tilde{A}$ pour une certaine R -algèbre A . Dans ce cas on pose $Y = \text{Spec}(A)$ et le résultat se déduit facilement de 3.3.2. Dans le cas général, on peut recouvrir S par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(R_i)$, on a $\mathcal{A}|_{U_i} = \tilde{A}_i$ pour une certaine R_i -algèbre A_i et on pose $Y_i = \text{Spec}(A_i)$. L'ouvert $Y_{i,j}$ préimage de $U_i \cap U_j$ dans Y_i vérifie la propriété universelle du schéma $\text{Spec}(\mathcal{A}|_{U_i \cap U_j})$. Par symétrie il en va de même de $Y_{j,i}$ et on a donc un isomorphisme canonique $\varphi_{i,j} : Y_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{j,i}$. On note Y le S -schéma obtenu par recollement des Y_i le long des $Y_{i,j}$. La vérification de la propriété universelle est immédiate car la bijection annoncée peut se tester localement : plus précisément, si l'on note α, β les deux applications en sens inverses entre les deux ensembles Hom , on peut tester les égalités $\alpha(\beta(f)) = f$ et $\beta(\alpha(g)) = g$ localement sur chaque U_i . $\square$

4.4.4 Remarque. De plus, la formation de $\text{Spec}(\mathcal{A})$ commute au changement de base sur S , i.e. pour tout morphisme de schémas $u : S' \rightarrow S$ il existe un isomorphisme canonique de S' -schémas

$$\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S' \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(u^* \mathcal{A}).$$

En effet, pour montrer cela il suffit de montrer que les S' -schémas $\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'$ et $\text{Spec}(u^* \mathcal{A})$ sont solution du même problème universel. (C'est une manière de voir le lemme de Yoneda.) Or pour tout S' -schéma $f' : X' \rightarrow S'$ on a des bijections canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(u^* \mathcal{A})) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}\text{-Alg}}(u^* \mathcal{A}, \mathcal{A}'(X')) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, u_* \mathcal{A}'(X')) \text{ par adjonction,} \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X')) \text{ en posant } f = u \circ f' : X' \rightarrow S, \\ &= \text{Hom}_S(X', \text{Spec}(\mathcal{A})) \\ &= \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'). \end{aligned}$$

Ceci conclut l'argument.

4.4.5 Exercice. Soit X un schéma et $\mathcal{I}$ un idéal quasi-cohérent. On veut montrer que le sous-schéma fermé $V(\mathcal{I})$ est isomorphe à $\text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

(1) En utilisant la propriété universelle de $\text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ (prop. 4.4.3), construisez un morphisme de X -schémas $f : V(\mathcal{I}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

(2) On note $Y = V(\mathcal{I})$ et $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Démontrez que le morphisme $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} i_* \mathcal{O}_Y$. Déduisez-en que f est un isomorphisme.

4.4.6 Exercice. Soit S un schéma. Définissez la $\mathcal{O}_S$ -algèbre $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes en $t_1, \dots, t_n$ et montrez que son spectre est l'espace affine $\mathbb{A}_S^n$. Décrivez la propriété universelle du S -schéma $\mu_{n,S} := \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^n - 1))$. (Plus généralement, on peut définir une algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ et un schéma $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$ pour tout choix de r polynômes $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)[t_1, \dots, t_n]$.)

Table des matières

1	Contexte et motivation	2
1.1	Constructions fondamentales en géométrie et en théorie des nombres	2
1.2	Variétés algébriques classiques	2
1.3	L'idée des schémas	4
2	Définition des schémas	5
2.1	L'ensemble sous-jacent à un schéma affine	5
2.2	L'espace topologique d'un schéma affine	9
2.3	Interlude 1 : catégories et foncteurs	10
2.4	Interlude 2 : faisceaux	14
2.5	Le faisceau de fonctions d'un schéma affine	17
2.6	Interlude 3 : image directe et image inverse de faisceaux	18
2.7	Définition des schémas et des morphismes de schémas	22
3	Recollement et produits fibrés	24
3.1	Recollement	24
3.2	Schémas relatifs et foncteur de points	27
3.3	L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$	28
3.4	L'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$	30
3.5	Produits fibrés	31
4	Modules sur les schémas	36
4.1	Modules sur les espaces annelés	36
4.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas	38
4.3	Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas	44
4.4	Algèbres quasi-cohérentes	46