

Géométrie algébrique et cohomologie

Table des matières

1	Introduction	2
2	La géométrie des anneaux	3
2.1	Nombres, espaces, fonctions	4
2.2	Le théorème de Gelfand-Kolmogorov (1939)	4
2.3	Le théorème des zéros de Hilbert (1893)	5
2.4	Un vieux rêve d'unification de Kronecker (1882)	7
2.5	La théorie des schémas	8
3	Le spectre premier	9
3.1	L'espace topologique $\text{Spec } A$	9
3.2	Propriétés de séparation et de quasi-compacité	13
3.3	Fonctions sur le spectre	16
4	Catégories	18
4.1	Catégories	19
4.2	Foncteurs	22
4.3	Lemme de Yoneda	26
4.4	Adjonctions	28
4.5	Limites et colimites	32
5	Faisceaux	37
5.1	Motivation et historique	37
5.2	Préfaisceaux	39
5.3	Faisceaux et faisceautisation	42
5.4	Opérations internes : limites, colimites, \otimes , $\mathcal{H}om$	45
5.5	Images directes et inverses	48
6	Schémas	53
6.1	Faisceau des fonctions sur $\text{Spec } A$	53
6.2	Schémas	55
6.3	Recollement	58
6.4	Foncteur de points	61
6.5	L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$	63
6.6	Produits fibrés	64

7	Modules sur les schémas	68
7.1	Rappels sur les modules sur les espaces annelés	68
7.2	Modules quasi-cohérents sur les schémas	70
7.3	Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas	76
7.4	Algèbres quasi-cohérentes	78
7.5	Faisceaux inversibles	81
8	Propriétés des schémas	84
8.1	Fermés irréductibles et points	84
8.2	Schémas réduits et intègres	86
8.3	Schémas noethériens	88
8.4	Variétés classiques	89
8.5	Schémas sur un corps non algébriquement clos	91
8.6	Schémas arithmétiques	94
9	Propriétés des morphismes	95
9.1	Morphismes séparés	96
9.2	Morphismes affines et quasi-compacts	98
9.3	Morphismes de type fini, morphismes finis	99
9.4	Morphismes propres	100
9.5	Critères valuatifs	101
9.6	Deux résultats sur les morphismes de schémas	105
10	Algèbre homologique	106
10.1	Comment représenter un module ?	107
10.2	Catégories abéliennes	108
10.3	Complexes	112
10.4	Résolutions	115
10.5	Exactitude (cas non abélien)	118
11	Cohomologie de Čech	121
11.1	Cohomologie de Čech des schémas affines	124
11.2	Cohomologie de Čech de l'espace projectif	124
12	Cohomologie des foncteurs dérivés	124
A	Modules, algèbres et produit tensoriel	124

1 Introduction

Prérequis. Concernant l'algèbre commutative, je suppose que les lecteurs et lectrices disposent de connaissances du niveau d'un cours de base tel que le cours *Algèbre Commutative et Géométrie Algébrique* (ACGA) enseigné à Rennes ; on pourra se référer par exemple au polycopié de Bernard Le Stum [LS22]. Ce matériel se trouve aussi dans le chapitre I du livre de Daniel Perrin [Pe01].

Concernant les modules sur un anneau, il sera très important d'être à l'aise avec la définition et les propriétés de base du produit tensoriel ; en revanche, la théorie des modules (structure ; simplicité ; représentations) n'est pas utile pour le cours. Je ne ferai aucun rappel en cours. L'appendice A offre un résumé succinct des concepts utiles et fournit quelques références pour aller plus loin.

Deux parties à lire en parallèle du cours. La section 2 sur la géométrie des anneaux et l'appendice A sur les modules ne seront pas abordés en cours, et il est recommandé de les lire de votre côté. La partie 2 est de nature introductive ; son but est de donner des éléments de contexte historico-mathématique qui expliquent comment la théorie des schémas est apparue naturellement. L'appendice A est un résumé de quelques notions élémentaires sur les modules qui seront nécessaires pour le cours à partir de la section 4 sur les catégories, puis surtout la section 7 sur les modules sur les schémas.

Un mot sur les catégories. Dans ce cours on a choisi d'accorder une part assez importante à l'exposé du langage des catégories. Dans la géométrie algébrique moderne, les catégories fournissent un cadre conceptuel extrêmement puissant pour formuler les définitions correctes mais aussi pour énoncer et démontrer un grand nombre de résultats clés. Nous les présentons dans un niveau de détail un peu plus important que strictement nécessaire. Ce choix est motivé par le fait que l'importance des catégories en géométrie algébrique n'a fait qu'augmenter avec le temps, comme l'ont montré la géométrie algébrique dérivée, la géométrie algébrique supérieure et encore plus récemment les mathématiques condensées.

Évaluation du cours. Le cours *Géométrie algébrique et cohomologie, I* est évalué avec deux notes : une note obtenue à l'aide d'exercices que vous devrez rendre quand vous voulez pendant les mois de septembre et d'octobre, et une note correspondant à un devoir à la maison qui vous sera donné en octobre.

Un mot sur les exercices. De nombreuses (parties de) démonstrations du cours sont laissées en exercice. Il est recommandé d'en faire le plus possible. Pour la note d'exercices (contrôle continu) je vous demande de me rendre trois exercices à choisir parmi tous les exercices des notes de cours. Les exercices introduits par le symbole encadré Exercice sont supposés être les plus adaptés pour la note d'exercices, mais il n'est pas impossible d'en choisir d'autres. Voici les principaux critères d'évaluation : pertinence, clarté, concision de la rédaction ; difficulté ; longueur ; bonne évaluation du niveau des prérequis (ne pas utiliser en boîte noire des choses importantes).

Références principales du cours. Références primaires : Hartshorne [Har77] pour la géométrie algébrique, Eisenbud [Ei95] pour l'algèbre commutative, Leinster [Le14] pour la théorie des catégories. Références secondaires : Görtz et Wedhorn [GW20] pour la géométrie algébrique, Matsumura [Mat89] pour l'algèbre commutative.

Convention. Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. L'*anneau nul* est le seul anneau dans lequel $0 = 1$.

2 La géométrie des anneaux

Dans cette partie, on donne quelques éléments de contexte pour expliquer comment le spectre premier des anneaux (commutatifs et unitaires, comme toujours dans ce cours) a été introduit comme modèle local pour les « variétés » (en un sens très général) en géométrie algébrique.

2.1 Nombres, espaces, fonctions

L'un des concepts mathématiques les plus fondamentaux est celui de *nombre*; les nombres sont les héros de l'Arithmétique, aussi appelée Théorie des nombres. Au sein de la discipline mathématique, la question de la raison d'être ou de la nature profonde de la notion de nombre n'a pas de réponse définitive. Adoptant un point de vue formel, on peut observer en tout cas que les nombres jouissent de la propriété essentielle de pouvoir être additionnés et multipliés. Or bien sûr, additionner et multiplier des nombres nécessite de se placer dans un ensemble ambiant où ces opérations ont du sens. C'est cette réflexion qui a mené les algébristes à proposer une définition abstraite de la notion d'*anneau*, et on peut avancer que la notion de nombre est indissociable de celle d'anneau. Des travaux de didacticiens montrent d'ailleurs que si la distributivité $a(b+c) = ab+ac$ pour les entiers positifs se justifie facilement en calculant l'aire de rectangles accolés, en revanche la règle des signes « $(-1) \times (-1) = +1$ » pour les entiers relatifs est plus problématique. Elle ne peut s'expliquer de manière satisfaisante que si l'on impose *a priori* la distributivité dans \mathbb{Z} , autrement dit, si l'on impose aux entiers relatifs d'être éléments d'un ensemble muni d'une structure axiomatique d'anneau; voir [Gl81].

Un autre concept fondamental est celui d'*espace*; les espaces sont les héros de la Géométrie. Un point de vue moderne sur l'étude des espaces est d'utiliser l'outil précieux fourni par les *fonctions numériques*, c'est-à-dire les fonctions $f : X \rightarrow K$ sur un espace X à valeurs dans un ensemble de nombres K (un anneau). La plupart du temps nous disons simplement *fonction* au lieu de *fonction numérique*; les exemples les plus familiers sont les fonctions réelles ou les fonctions complexes. L'ensemble de fonctions $A = \mathcal{F}(X, K)$ porte une structure d'anneau, héritée de celle de E .

Le lien entre espaces et anneaux de fonctions n'est pas anecdotique; voici dans les deux sous-sections suivantes deux exemples qui témoignent de sa profondeur.

2.2 Le théorème de Gelfand-Kolmogorov (1939)

Le premier exemple porte sur les espaces topologiques compacts. Associons à chaque espace topologique X la \mathbb{R} -algèbre $C(X) = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur X . Tout point $x \in X$ donne naissance à un idéal $m_x = \{f \in C(X); f(x) = 0\}$ qui est maximal, puisque l'évaluation en x induit un isomorphisme $C(X)/m_x \simeq \mathbb{R}$. (On rappelle qu'un idéal I d'un anneau A est dit *maximal* lorsqu'il est distinct de A et maximal pour l'inclusion, de manière équivalence, lorsque A/I est un corps.) Notons $\text{Spm } C(X)$ l'ensemble des idéaux maximaux en question, appelé *spectre maximal* de $C(X)$. On peut le munir de la topologie engendrée par les parties

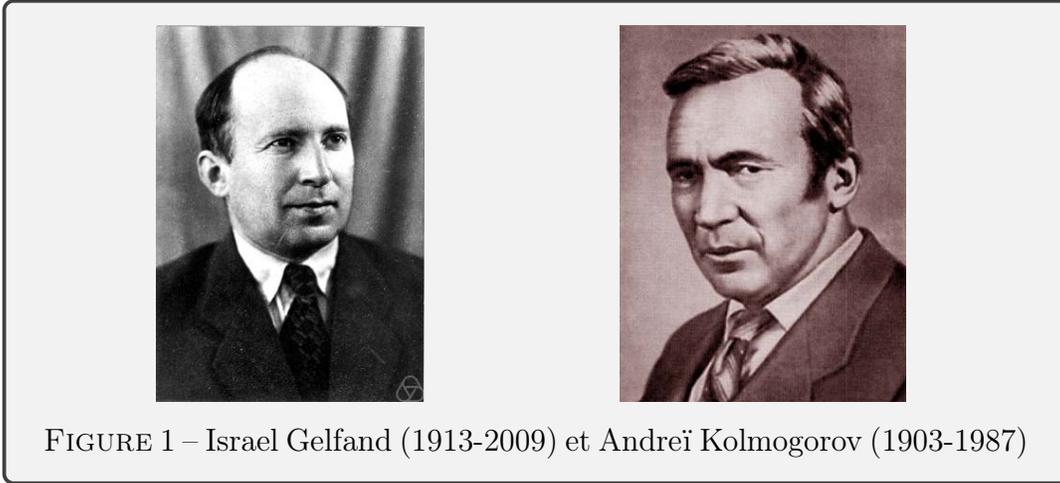
$$D(f) = \{m \in C(X); f \notin m\};$$

cela signifie qu'un ouvert est une réunion arbitraire de $D(f)$ et que les $D(f)$ forment une base d'ouverts. On démontre le résultat suivant.

2.2.1 Théorème ([Ra22, Th. 1.28]) *Si X est compact, l'application $X \rightarrow \text{Spm } C(X)$, $x \mapsto m_x$ est un homéomorphisme.*

La surjectivité, qui montre l'importance de la compacité, est élémentaire : soit $m \subset C(X)$ un idéal maximal. Si pour chaque $x \in X$ on a $m \subsetneq m_x$, alors il existe une fonction $f_x \in m_x$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Soit U_x un voisinage de x sur lequel la fonction continue f_x ne s'annule pas, et soit U_{x_1}, \dots, U_{x_n} un

sous-recouvrement fini de $\{U_x\}_{x \in X}$. On voit alors que la fonction $f := f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2$ est strictement positive en tout point, donc inversible. Comme $f \in m$, on a une contradiction. Cela signifie qu'il existe x tel que $m \subset m_x$ et cette inclusion est une égalité par maximalité de m .



Chaque application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces compacts induit un morphisme de \mathbb{R} -algèbres $f^* : C(Y) \rightarrow C(X)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ et on voit ainsi que C est un foncteur contravariant. (Nous utilisons dès maintenant le langage des catégories et des foncteurs, et nous invitons la lectrice qui le découvre à consulter les définitions 4.1.1 et 4.2.1 de la section 4). On démontre alors :

2.2.2 Théorème ([Ra22], Ex. 1.29) *Le foncteur C , de la catégorie des espaces topologiques compacts dans la catégorie des \mathbb{R} -algèbres (commutatives, unitaires), est pleinement fidèle, c'est-à-dire que les applications $\mathcal{C}^0(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathbb{R})}(C(Y), C(X))$, $f \mapsto f^*$ sont bijectives.*

En résumé, on peut « retrouver X connaissant $C(X)$ ». Une autre référence qui mentionne ces résultats est Eisenbud [Ei95], exercice 1.25.

2.3 Le théorème des zéros de Hilbert (1893)

Le deuxième exemple pour témoigner du lien entre espaces et anneaux de fonctions est le fameux théorème des zéros, aussi appelé *Nullstellensatz*. Celui-ci est la pierre angulaire de la géométrie algébrique classique, qui est l'étude des variétés affines ou projectives sur un corps algébriquement clos k . Pour rappeler l'énoncé du théorème, plaçons-nous dans l'espace affine $\mathbb{A}_k^n = k^n$. On appelle *sous-ensemble algébrique* de l'espace affine un ensemble de la forme

$$V(I) = \{x \in k^n; f(x) = 0, \forall f \in I\}$$

où I est un idéal de la k -algèbre de polynômes $k[t_1, \dots, t_n]$, qui représente les fonctions polynomiales sur \mathbb{A}_k^n . Un tel ensemble $V = V(I)$ est muni de la *topologie de Zariski* dont les fermés sont les sous-ensembles algébriques inclus dans V . Réciproquement, à toute partie $V \subset \mathbb{A}_k^n$ on associe l'idéal

$$I(V) = \{f \in k[t_1, \dots, t_n]; \tilde{f}|_V = 0\}$$

où $\tilde{f} : k^n \rightarrow k$ est la fonction associée à f , et on dit que $\Gamma(V) := k[t_1, \dots, t_n]/I(V)$ est l'*algèbre des fonctions régulières sur V* . Enfin on rappelle qu'un idéal I d'un anneau A est dit *maximal*, resp. *premier*, resp. *radical* lorsque A/I est un corps, resp. intègre, resp. réduit.

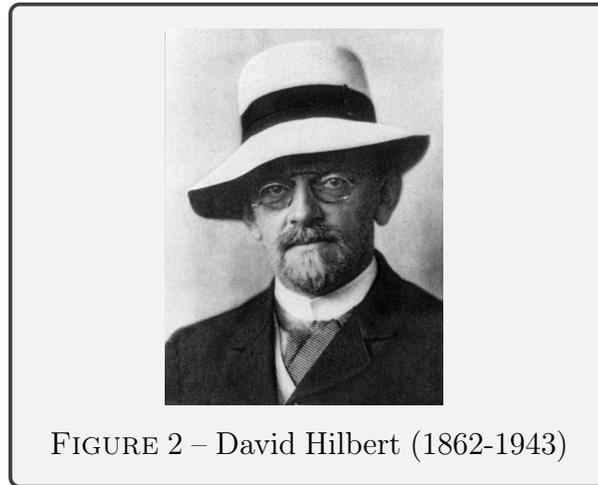
2.3.1 Remarque (Deux conséquences classiques du lemme de Zorn). En toute généralité, si I est un idéal d'un anneau A , on définit le *radical de I* par

$$\sqrt{I} := \{f \in A, f^n \in I \text{ pour un } n \geq 0\}.$$

C'est le plus petit idéal radical de A contenant I , et I est radical si et seulement si $I = \sqrt{I}$. Rappelons deux conséquences très importantes du lemme de Zorn :

1. *Tout idéal strict d'un anneau est inclus dans un idéal maximal.*
2. *Le radical \sqrt{I} est l'intersection des premiers de A contenant I .*

Pour une discussion de ces résultats on renvoie à [Ei95], Cor. 2.12 et [Mat89], Th. 1.1, 1.2 et les commentaires qui suivent.



2.3.2 Théorème (Nullstellensatz, [Ei95], Th. 1.6) *Soit k un corps algébriquement clos. Pour tout idéal $I \subset k[t_1, \dots, t_n]$, on a*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Ainsi, les applications $I \mapsto V(I)$ et $V \mapsto I(V)$ induisent une bijection décroissante entre l'ensemble des sous-ensembles algébriques de \mathbb{A}_k^n et l'ensemble des idéaux radicaux de $k[t_1, \dots, t_n]$.

Comme la bijection est décroissante, l'idéal I est maximal si et seulement si l'ensemble $V(I)$ est minimal. En fait, le Nullstellensatz entraîne que les idéaux maximaux sont tous de la forme

$$I = (t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$$

pour un certain uplet $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ (voir [Ei95], Cor. 1.9), et l'ensemble algébrique correspondant est donc simplement le point a . Si l'on fixe un ensemble algébrique $X \subset \mathbb{A}_k^n$, la bijection du Nullstellensatz se restreint en une bijection entre points de X et idéaux maximaux de $\Gamma(X)$. On obtient ainsi un énoncé dont la forme se rapproche de celle du théorème 2.2.1 :

2.3.3 Théorème. Si X est un sous-ensemble algébrique de \mathbb{A}_k^n , l'application

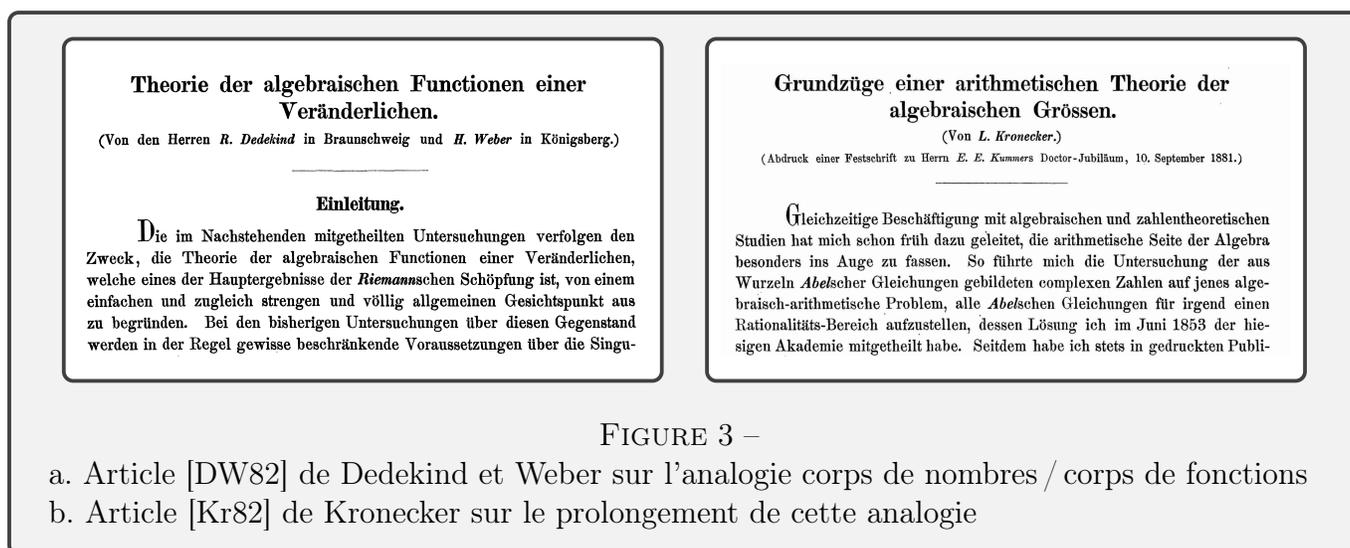
$$X \longrightarrow \mathrm{Spm} \Gamma(X), \quad x \longmapsto I(\{x\})$$

est une bijection.

En fait, en munissant $\mathrm{Spm} \Gamma(X)$ de la topologie engendrée par les parties $D(f) = \{m; f \notin m\}$, on démontre que l'application ci-dessus est un homéomorphisme. On obtient donc un véritable analogue de 2.2.1. Ici encore, on peut « retrouver X connaissant $\Gamma(X)$ ».

2.4 Un vieux rêve d'unification de Kronecker (1882)

Dès les premiers temps de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres algébrique moderne, sous l'impulsion allemande à la fin du dix-neuvième siècle, l'analogie entre les anneaux de fonctions de courbes algébriques $\Gamma(X)$ et les anneaux d'entiers \mathcal{O}_K dans les corps de nombres (extensions finies de \mathbb{Q}) a été remarquée.



Certains, dont Kronecker, ont émis le souhait de disposer d'un formalisme permettant de traiter ces anneaux divers sur un pied d'égalité. Citons par exemple Marc Hindry [Hi93] :

« une bonne partie de l'œuvre [d'André Weil] est émaillée de préoccupations sur l'analogie entre corps de fonctions et corps de nombres. Il n'est évidemment pas le seul; il cite souvent Artin, Hasse et glorifie en particulier le point de vue de Kronecker comme plus profond et supérieur à celui réputé plus élégant de Dedekind : "Dans son Grundzüge, Kronecker ne cherche pas seulement à donner son propre traitement des problèmes fondamentaux de la théorie des idéaux, qui forment le sujet principal des travaux de Dedekind; son but est plus haut. Il cherchait à décrire et initier une nouvelle branche des mathématiques qui contiendrait la théorie des nombres et la géométrie algébrique comme cas particuliers". Weil suggère qu'il s'agit d'un texte trilingue, les trois colonnes étant l'arithmétique, la géométrie algébrique et la géométrie de Riemann (analytique complexe). On peut considérer que le programme d'unification des deux premières est rempli par la théorie des schémas de Grothendieck. »

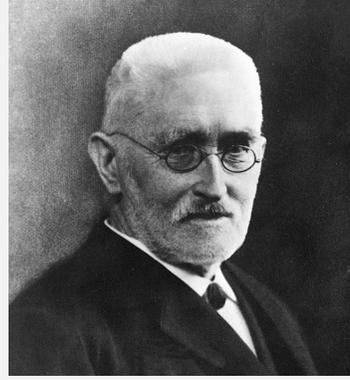


FIGURE 4 – Leopold Kronecker (1823-1891) et Richard Dedekind (1831-1916)

Pour réaliser ce programme d'unification, les énoncés 2.2.1 et 2.3.3 fournissent une inspiration décisive : une algèbre A fournit un ensemble $X = \text{Spm } A$ qui possède une structure géométrique naturelle et riche. On souhaiterait simplement pouvoir utiliser cette construction pour des anneaux plus généraux, de manière à inclure :

- les anneaux d'entiers algébriques $A = \mathcal{O}_K$ qui ne sont pas des algèbres sur un corps ;
- les anneaux non réduits comme $A = k[t]/(t^2)$ qui apparaît lorsqu'on étudie l'intersection de la parabole $X = V(y - x^2)$ avec des droites $X_a = V(y - a)$, lorsque a s'annule ;
- d'autres types d'anneaux encore : idéalement, tous les anneaux !

Se pose alors le problème suivant : lorsqu'on sort des contextes particuliers des énoncés 2.2.1 et 2.3.3, un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ ne donne pas nécessairement lieu à une application $\text{Spm } B \rightarrow \text{Spm } A$ par préimage des idéaux, pour la bonne raison que si $n \subset B$ est maximal, alors $f^{-1}(n) \subset A$ ne l'est pas toujours. De fait, l'inclusion

$$A/f^{-1}(n) \hookrightarrow B/n$$

ne suffit pas pour déduire que $A/f^{-1}(n)$ est un corps (prendre $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $n = (0)$).

Un sous-anneau d'un corps n'est pas nécessairement un corps... mais un sous-anneau d'un anneau intègre est intègre ! (Voir figure 5.) Donc si on remplace $\text{Spm } A$ par l'ensemble $\text{Spec } A$ des idéaux premiers de A , ce problème est résolu.

2.5 La théorie des schémas

Nous avons en main l'objet de départ de la théorie des schémas : le spectre premier d'un anneau. Dans la section suivante, nous allons étudier cet objet, qui est le modèle local pour les schémas. Pour obtenir un objet global, nous aurons besoin de quelques éléments de théorie des catégories et de théorie des faisceaux ; toutes deux apparurent au milieu du vingtième siècle, ce qui explique qu'il fallut attendre longtemps pour voir réalisé le vieux rêve d'unification de Kronecker. Nous y viendrons donc après un détour par ces théories.



FIGURE 5 – Découverte du paradoxe de Russell dans Logicomix ([DPP10], p. 163), scandaleusement détournée pour les besoins de ce cours

Une fois construite, la catégorie des schémas contient la catégorie des variétés algébriques sur un corps k au sens classique, pour tout corps de base k . Ainsi la géométrie classique se trouvera plongée dans la théorie des schémas.

3 Le spectre premier

Dans cette section, nous faisons le premier pas vers la définition d'un schéma : nous introduisons l'espace topologique sous-jacent à un schéma affine et décrivons ses premières propriétés.

3.1 L'espace topologique $\text{Spec } A$

3.1.1 Définition. Soient A un anneau, $I \subset A$ un idéal, $f \in A$ un élément.

- On appelle *spectre premier de A* l'ensemble $\text{Spec } A$ des idéaux premiers de A .
- On appelle *fermé* une partie de la forme $V(I) = \{p \in \text{Spec } A, p \supset I\}$.
- On appelle *ouvert affine principal* une partie de la forme $D(f) = \{p \in \text{Spec } A, f \notin p\}$.

Les ouverts $D(f)$ sont parfois aussi appelés *ouverts affines distingués*.

3.1.2 Exercice (Topologie de Zariski). Soit A un anneau. Démontrez :

1. Pour toute paire I, J d'idéaux on a $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$,
2. Pour toute famille $\{I_s\}_{s \in S}$ d'idéaux on a $\bigcap_{s \in S} V(I_s) = V(\sum_{s \in S} I_s)$.
3. Conclure que les $V(I)$ sont les fermés d'une topologie : la *topologie de Zariski* sur $\text{Spec } A$.



FIGURE 6 – Oscar Zariski (1899-1986)

Les définitions montrent que $D(f)$ est le complémentaire de $V(f)$, c'est donc bien un ouvert. Plus généralement, si l'on note $D(I)$ l'ouvert complémentaire du fermé $V(I)$, on voit que

$$D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f).$$

Ainsi : *les ouverts affines principaux forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.*

Nous allons maintenant introduire l'espace affine sur un corps, dans la forme sous laquelle il apparaît en théorie des schémas. Pour l'instant nous le définissons simplement comme un espace topologique, en suivant les réflexions de la section 2 que nous rappelons ici :

- si k est un corps algébriquement clos, l'espace affine classique $\mathbb{A}_k^n = k^n$ s'identifie au spectre maximal de l'anneau $k[t_1, \dots, t_n]$ (pour cela on associe à un point $x \in k^n$ l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en x , voir le Théorème 2.3.3 avec $X = \mathbb{A}_k^n$);
- pour résoudre des problèmes de functorialité, nous avons décidé de remplacer le spectre maximal $\text{Spm } A$ d'un anneau par le spectre premier $\text{Spec } A$ (voir la discussion du § 2.4).

3.1.3 Définition. Soit k un corps. On note \mathbb{A}_k^n et on appelle *espace affine de dimension n sur k* l'espace topologique $\text{Spec}(k[t_1, \dots, t_n])$.

3.1.4 Exercice (Functorialité de Spec). Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

1. La préimage par φ d'un idéal $J \subset B$ est notée $\varphi^{-1}(J)$ ou $J \cap A$ (même lorsque φ n'est pas injectif). Démontrez que si $q \subset B$ est premier, alors $q \cap A$ est premier. Ceci définit une application $\text{Spec } \varphi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$, $q \mapsto q \cap A$.
2. L'idéal de B engendré par l'image d'un idéal $I \subset A$ est notée IB . Démontrez que la préimage par $\text{Spec } \varphi$ du fermé $V(I)$ est le fermé $V(IB)$. Ainsi $\text{Spec } \varphi$ est une application continue.

Il se trouve que les fermés, ainsi que les ouverts affines principaux, sont (homéomorphes à) des spectres d'anneaux. (Ce n'est pas le cas pour les ouverts arbitraires $U \subset \text{Spec } A$, nous verrons des contre-exemples plus loin dans le cours.) Pour le démontrer, nous avons besoin d'utiliser la localisation. Ce concept central reviendra souvent dans le cours ; voici un rappel et quelques exemples sous forme d'exercices.

3.1.5 Exercice (Localisation d'anneaux, [Ei95, § 2.1], [Mat89, § 4]).

Soient A un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative. Démontrez les faits suivants.

1. Il existe un anneau $S^{-1}A$ et un morphisme d'anneaux $u : A \rightarrow S^{-1}A$, appelé *localisé de A par rapport à S* , vérifiant la propriété universelle suivante :
 - (a) pour tout $s \in S$, l'image $u(s)$ est inversible,
 - (b) pour tout morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ tel que les éléments de $f(S)$ sont inversibles, il existe un unique morphisme d'anneaux $f' : S^{-1}A \rightarrow B$ tel que $f = f' \circ u$.
2. Les applications $p \mapsto S^{-1}p$ et $q \mapsto q \cap A$ établissent des bijections croissantes entre l'ensemble des premiers $p \subset A$ qui ne rencontrent pas S et l'ensemble des premiers $q \subset S^{-1}A$ distincts de $S^{-1}A$.

3.1.6 Exercice (Localisation d'anneaux : exemples). Soit A un anneau.

1. (Anneau total des fractions) Démontrez que la plus grande partie multiplicative $S \subset A$ telle que $u : A \rightarrow S^{-1}A$ est injectif est l'ensemble des non-diviseurs de 0. Le localisé correspondant est appelé *anneau total des fractions* de A .
2. (Localisé en un premier) Soit p un idéal premier. Démontrez que $S = A \setminus p$ est une partie multiplicative puis que le localisé $A_p := S^{-1}A$ est un anneau local d'idéal maximal pA_p et de corps résiduel $\kappa(p) = A_p/pA_p$ canoniquement isomorphe à $\text{Frac}(A/p)$.
3. (Localisé par rapport à un élément) Soit $f \in A$. On note A_f ou $A[1/f]$ le localisé de A par rapport à la partie $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Démontrez qu'il existe un unique isomorphisme de A -algèbres $A[X]/(1 - fX) \xrightarrow{\sim} A_f$. Donnez un exemple d'anneau A avec deux éléments f, g satisfaisant $f|g$ et tels que le morphisme canonique $A_f \rightarrow A_g$ n'est pas injectif.

(Les notations A_p et A_f sont standard ; on pourrait penser que le risque de confusion entre elles est important, mais en pratique le statut de l'indice p ou f , idéal premier ou élément, assure que ce n'est pas le cas.)

3.1.7 Exercice (Les espaces $V(I)$ et $D(f)$ sont des spectres). Soient A un anneau.

1. Pour tout idéal I , l'application continue $\text{Spec } \varphi : \text{Spec } A/I \rightarrow \text{Spec } A$ associée à la projection canonique $\varphi : A \rightarrow A/I$ induit un homéomorphisme $\text{Spec } A/I \xrightarrow{\sim} V(I)$.
2. Pour tout $f \in A$, l'application continue $\text{Spec } \varphi : \text{Spec } A_f \rightarrow \text{Spec } A$ associée au morphisme de localisation $\varphi : A \rightarrow A_f$ induit un homéomorphisme $\text{Spec } A_f \xrightarrow{\sim} D(f)$.

3.1.8 Exercice (Inclusions entre ouverts affines principaux). Soient $f, g \in A$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $D(f) \subset D(g)$,
2. il existe $a \in A$ et $n \geq 1$ entier tels que $f^n = ag$,
3. l'image de g dans A_f est inversible,
4. le morphisme de localisation $A \rightarrow A_f$ se factorise à travers un (unique) morphisme $A_g \rightarrow A_f$.

Ainsi $D(f) = D(g)$ si et seulement si le diagramme ci-dessous de morphismes d'anneaux peut être complété avec des isomorphismes (et il y a alors une unique manière de le faire).

$$\begin{array}{ccc}
 & & A_f \\
 & \nearrow & \uparrow \vdots \downarrow \\
 A & & A_g \\
 & \searrow & \\
 & &
 \end{array}$$

Pour terminer cette sous-section 3.1, nous allons donner quelques exemples simples.

3.1.9 Exemples.

1. Le spectre de \mathbb{Z} est composé de l'idéal (0) et de tous les idéaux (p) engendrés par les nombres premiers p .
2. La droite affine \mathbb{A}_k^1 sur un corps k est le spectre de l'anneau de polynômes $k[x]$. Comme celui-ci est principal, la description est semblable à celle du spectre de \mathbb{Z} . On trouve que l'ensemble \mathbb{A}_k^1 est composé de (0) et de tous les idéaux (f) engendrés par les polynômes irréductibles unitaires. Si k est algébriquement clos, les polynômes irréductibles sont de la forme $x - a$ avec $a \in k$, si bien que $\mathbb{A}_k^1 = \{0\} \cup k$. Par rapport à la variété classique, on n'a ajouté que le point (0) .

Pour aller un peu plus loin que la droite affine, on peut décrire le plan affine.

3.1.10 Proposition. *Soit k un corps. Les points du plan affine $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$, c'est-à-dire les idéaux premiers de l'anneau $A = k[x, y]$, sont de l'un des trois types suivants :*

- (i) L'idéal $p = (0)$ qui est l'unique premier minimal.
- (ii) Les idéaux de la forme $p = (f)$ où $f \in k[x, y]$ est un polynôme irréductible.
- (iii) Les idéaux de la forme $m = (f(x), g(x, y))$ avec f irréductible dans $k[x]$ et \bar{g} irréductible dans $(k[x]/(f))[y]$. Ce sont les idéaux maximaux. Si k est algébriquement clos, ces idéaux maximaux sont simplement de la forme $m = (x - a, y - b)$ avec $(a, b) \in k^2$.

Démonstration : La version forte du Nullstellensatz ([Ei95], th. 4.19) permet d'obtenir le résultat rapidement, mais nous préférons donner une démonstration aussi élémentaire que possible. Notons $A = k[x, y]$ et soit $p \subset A$ un idéal premier.

Si $p = (0)$ on est dans le cas (i).

Si $p \neq (0)$, il contient un élément $f \in A$ non nul. Comme p est premier, nécessairement l'un des facteurs irréductibles de f est dans p . Quitte à remplacer f par ce facteur, on peut donc choisir f irréductible. Comme A est factoriel, l'idéal (f) est premier. Si $p = (f)$, on est dans le cas (ii).

Si $p \neq (f)$, il contient un élément $g \notin (f)$. On conclut ainsi :

- On peut trouver $f, g \in A$ irréductibles non associés tels que $(f, g) \subset p$. En effet, par le même raisonnement que précédemment, p contient un des facteurs irréductibles g_1 de g , et nécessairement $g_1 \notin (f)$. Quitte à remplacer g par g_1 , on peut supposer g irréductible et on a gagné.
- On peut faire ces choix de telle manière que $f \in k[x]$. Pour voir cela, notons $R = k[x]$ et K son corps de fractions. Si f ou g appartient à R on a gagné. Sinon, d'après le théorème de Gauss sur la factorialité de $R[y]$, dans $K[y]$ les éléments f, g sont encore irréductibles non associés. D'après le théorème de Bézout dans l'anneau principal $K[y]$, il existe $u, v \in K[y]$ tels que

$uf + vg = 1$. En chassant les dénominateurs des coefficients de u et v on trouve $r, s \in R[y]$ et $t \in R$ tels que $rf + sg = t$. Ceci montre que p contient l'élément $t \in k[x]$. Considérons un facteur irréductible t_1 de t . En remplaçant f par t_1 et en recommençant comme au début, nous avons obtenu $f \in k[x]$ comme annoncé.

- On peut supposer que \bar{g} est irréductible dans $k_1[y]$, où $k_1 = k[x]/(f)$. En effet, soit $\bar{g} = \bar{g}_1\bar{g}_2$ une décomposition non triviale dans $A/(f)$. Il existe donc une écriture $g = g_1g_2 + af$ dans A , et on a $(f, g) = (f, g_1g_2)$. Comme p est premier, g_1 ou g_2 appartient à p , et en itérant on trouve un g comme désiré.
- On conclut. Puisque p contient (f, g) , on a une surjection $\varphi : A/(f, g) \rightarrow A/p$. Or $A/(f, g) = k_1[y]/(g)$ est un quotient de $k_1[y]$ par un idéal premier non nul, c'est donc un corps. La surjection φ est donc aussi injective et on a terminé.

Le cas où k est algébriquement clos en découle facilement. □

3.1.11 Exemple. Utilisant le fait que \mathbb{Z} et l'anneau de polynômes $k[t]$ sont principaux, on vérifie facilement que pour $X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ ou pour $X = \mathbb{A}_k^1$ (avec k un corps), les fermés de X sont X tout entier et les ensembles finis.

3.2 Propriétés de séparation et de quasi-compacité

Soit X un espace topologique. On rappelle que X est dit :

- *Hausdorff* si deux quelconques points distincts de X possèdent des voisinages disjoints.
- *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert de X possède un sous-recouvrement fini.
- *compact* s'il est Hausdorff et quasi-compact.

L'enseignement de la topologie dans les cours de Licence met souvent l'accent sur les espaces Hausdorff (par exemple les espaces métriques). L'exercice suivant montre que les espaces de la forme $X = \text{Spec } A$ ne le sont presque jamais. Pour cette raison, en théorie des schémas la propriété Hausdorff sera remplacée par une propriété plus faible. Cette propriété sera appelée *séparation*, c'est pourquoi nous éviterons ici d'utiliser le terme *séparé* comme un synonyme de Hausdorff.

3.2.1 Exercice (Adhérences dans $\text{Spec } A$). Soient A un anneau, p un idéal premier. Démontrez :

1. L'adhérence du point p de l'espace topologique $X = \text{Spec } A$ est le fermé $V(p)$.
2. Le point $p \in X$ est fermé si et seulement si l'idéal $p \subset A$ est maximal.
3. L'espace $X = \text{Spec } A$ est Hausdorff si et seulement si tout idéal premier est maximal.

Le point 3. donne l'occasion d'introduire la dimension de Krull d'un anneau :

3.2.2 Définition. La *dimension de Krull* (ou simplement *dimension*) de A est le supremum $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des longueurs des chaînes d'idéaux premiers $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n$ dans A .

Le résultat de l'exercice précédent se reformule en disant que $X = \text{Spec } A$ est Hausdorff ssi A est de dimension 0. De tels anneaux sont très particuliers ; si A est noethérien, cela signifie que A est *artinien*, c'est-à-dire un produit fini d'anneaux locaux à idéal maximal nilpotent (voir [Ei95], Th. 2.14 et Cor. 2.16). Par exemple, l'anneau $A = k[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes en n variables à coefficients dans un corps k , qui est l'anneau des fonctions de l'espace affine \mathbb{A}_k^n , possède une chaîne de premiers $p_0 \subset \dots \subset p_n$ avec $p_i = (t_1, \dots, t_i)$. Cette chaîne est de longueur n , donc A est de dimension 0 si et seulement si $n = 0$, i.e. $A = k$.

Passons à la quasi-compacité.

3.2.3 Proposition. *L'espace topologique $X = \text{Spec } A$ est quasi-compact.*

Démonstration : Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Quitte à le raffiner en recouvrant chaque U_i par des ouverts affines principaux, on peut supposer que $U_i = D(f_i)$. Si l'idéal $I \subset A$ engendré par les f_i est distinct de A , d'après 2.3.1.1 il est inclus dans un idéal maximal m . Comme le point $[m] \in X$ appartient à l'un des ouverts $D(f_i)$, on a $f_i \notin m$, ce qui est contradictoire ; donc $I = A$. En particulier $1 \in I$, donc il existe une écriture $1 = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ pour certains $a_i \in A$. On voit alors que $X = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_n)$ ce qui produit un sous-recouvrement fini. \square

3.2.4 Exercice (Ouvert non quasi-compact). Soit $A = k[t_1, t_2, \dots]$ l'algèbre des polynômes en une infinité dénombrable d'indéterminées à coefficients dans un corps k . Soit $X = \text{Spec } A$ et x le point correspondant à l'idéal $p = (t_1, t_2, \dots)$. Démontrez que $U := X \setminus \{x\}$ est un ouvert non quasi-compact de X . En particulier, l'espace U ne peut pas être le spectre d'un anneau.

Avant de terminer cette section, nous allons revenir sur les adhérences de points car il se trouve que ce sont exactement les « sous-variétés », i.e. les fermés irréductibles ; elles jouent évidemment un rôle primordial en géométrie algébrique. D'abord une définition.

3.2.5 Définition. Un espace topologique X est dit *irréductible* s'il est non vide et ne peut pas s'écrire comme réunion $X = X_1 \cup X_2$ de deux fermés propres (i.e. $X_i \neq X$). Une partie $Y \subset X$ est dite irréductible si, munie de la topologie induite de X , c'est un espace irréductible.

3.2.6 Exercice. Soit X un espace topologique. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $X \neq \emptyset$ et X n'est pas réunion de deux fermés stricts,
- (2) $X \neq \emptyset$ et deux ouverts non vides de X ont une intersection non vide,
- (3) $X \neq \emptyset$ et tout ouvert non vide de X est dense,
- (4) $X \neq \emptyset$ et tout ouvert de X est connexe.

Lorsqu'elles sont remplies, on dit que X est *irréductible*. Soit X quelconque et $Y \subset X$ une partie. Montrez que Y est irréductible si et seulement si son adhérence \overline{Y} est irréductible.

Voici deux exemples.

3.2.7 Exercice (Espaces irréductibles). Soient k un corps et $f \in k[t_1, \dots, t_n]$ avec $f \neq 0$.

1. L'espace $X = \text{Spec } k[t_1, \dots, t_n]$ est irréductible.
2. Le fermé $V(f)$ est irréductible si et seulement si f possède un seul facteur irréductible.

Nous allons en déduire que le spectre d'un anneau est *sobre*.

3.2.8 Définition. Soit X un espace topologique et Z un fermé irréductible.

- On appelle *point générique* de Z tout point $\eta \in Z$ tel que $\overline{\{\eta\}} = Z$.
- On dit que X est *sobre* si tout fermé irréductible possède un unique point générique.

3.2.9 Exercice (Fermés irréductibles et sobriété). Soit X un espace topologique.

1. L'adhérence de toute partie irréductible de X (par exemple, un point) est irréductible.
2. Si X est irréductible, tout ouvert non vide est irréductible et dense.

Dans la suite $X = \text{Spec } A$ pour un anneau A . On note I, J deux idéaux.

3. On a $V(I) = V(J)$ ssi $\sqrt{I} = \sqrt{J}$; il existe donc un plus grand idéal définissant un fermé $Z = V(I)$ de X , à savoir $\sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$. (On rappelle que $\sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$, voir remarque 2.3.1.2).
4. Soient p, q deux idéaux premiers. Si $V(p) = V(q)$, alors $p = q$. Déduisez-en que X est sobre.

La conclusion de cet exercice mérite un énoncé autonome :

3.2.10 Proposition. Soit $X = \text{Spec } A$. Alors on dispose de bijections inverses :

$$\{\text{points de } X\} \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{matrix} \{\text{fermés irréductibles de } X\}$$

définies par $\alpha(x) = \overline{\{x\}}$, l'adhérence dans X du point x , et $\beta(Z) = (\text{le point générique } \eta_Z)$.

Démonstration : L'existence et l'unicité du point générique η_Z découle de l'exercice 3.2.9. □

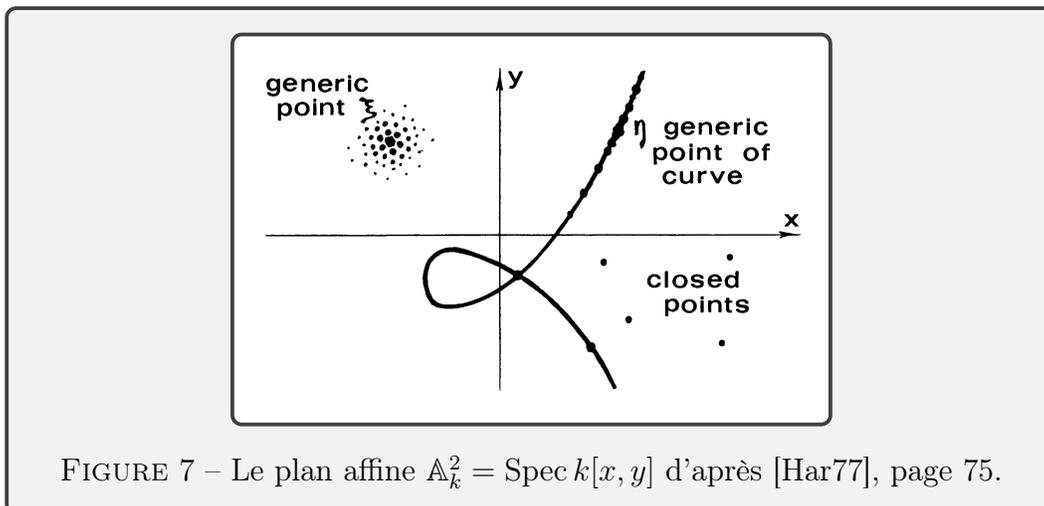
3.2.11 Dessiner un schéma. Nous pouvons utiliser les bijections α, β pour expliquer comment les variétés de la géométrie algébrique classique du § 2.3 se représentent dans le monde des schémas. À un ensemble algébrique $V \subset \mathbb{A}_k^n$ sur un corps algébriquement clos k , on a associé son algèbre de fonctions régulières

$$\Gamma(V) = k[t_1, \dots, t_n]/I(V).$$

Dans le monde des schémas, on remplace V par le « meilleur objet »

$$\tilde{V} = \text{Spec } \Gamma(V).$$

En termes plus précis, on plongera la catégorie des ensembles algébriques affines classiques dans la catégorie des schémas par le foncteur pleinement fidèle $V \mapsto \text{Spec } \Gamma(V)$. À l'aide de l'identification $V = \text{Spm } \Gamma(V)$ fournie par le Nullstellensatz (voir th. 2.3.3), on peut retrouver V comme l'ensemble des points fermés de \tilde{V} . En effet, les idéaux maximaux correspondent aux points fermés (voir 3.2.1.2). Grâce à la bijection (α, β) de 3.2.10, pour dessiner les premiers non maximaux on peut y penser comme aux sous-variétés irréductibles de V , de sorte que \tilde{V} se dessine en ajoutant aux points de V un point pour chaque sous-variété fermée de V . La figure 7 montre par exemple le dessin du plan affine.



3.3 Fonctions sur le spectre

3.3.1 Une convention de notation. Dans la suite, avec l'apparition d'un langage plus géométrique, il devient important d'adapter nos notations, car l'intuition attachée à un idéal premier $p \subset A$ est très différente de celle attachée à un point d'un espace géométrique $X = \text{Spec } A$. Pour cette raison, à partir de maintenant nous utiliserons systématiquement une lettre comme $x \in X$ pour désigner le point correspondant à $p \subset A$. Nous noterons parfois $x = [p]$ pour être plus précis. Un résumé de ces notations est donné dans le tableau de la figure 8 située en fin de section.

3.3.2 La notion de fonction. Revenons au développement de la théorie. Pour tirer tout le profit de la généralité fournie par la notion de spectre d'un anneau, nous allons maintenant effectuer un pas crucial en *redéfinissant la notion de fonction*. Cela nous mènera naturellement aux faisceaux (section 5) puis à la définition complète d'un schéma (section 6).

En quittant la géométrie algébrique classique pour le monde des schémas, nous voulons faire en sorte de faire disparaître les aspects problématiques des fonctions. Ceux-ci se voient déjà sur la droite affine sur un corps k , qui est maintenant définie (voir 3.1.3) par $\mathbb{A}_k^1 := \text{Spec } k[t]$:

- sur un corps k non algébriquement clos, les variétés n'ont pas assez de points pour représenter correctement les fonctions ; par exemple on aimerait que l'algèbre de fonctions de la droite affine $V = \mathbb{A}_k^1$ soit $\Gamma(V) = k[t]$, mais lorsque k est fini de cardinal q la fonction $t \mapsto t^q - t$ est nulle si bien que les fonctions $V \rightarrow k$ ne permettent de retrouver que le quotient $k[t]/(t^q - t)$;
- dans une autre direction, nous avons mentionné l'intérêt d'anneaux non réduits comme $A = k[t]/(t^2)$ pour étudier certaines intersections. Or compte tenu de l'égalité de fermés $\{0\} = V(t) = V(t^2) \subset \mathbb{A}_k^1$ (voir exercice 3.2.9, point 3), la fonction t définie sur $X = V(t^2) = \text{Spec } A$ est la fonction nulle. Or on voudrait pouvoir dire que sa seule puissance nulle est $t^2 = 0$.

Un simple (mais radical) changement de point de vue résout ces problèmes.

3.3.3 Définition. Soient A un anneau, $X = \text{Spec } A$ et $x = [p]$ un point de X .

- Une *fonction* (ou *fonction régulière*) sur X est un élément $f \in A$.

- Le *corps résiduel de X en x* est le corps de fractions $\kappa(x) := \text{Frac}(A/p)$.
- La *valeur de f au point x* notée $f(x)$ est l'image de f dans $\kappa(x)$, c'est-à-dire son image par le morphisme $A \rightarrow A/p \subset \text{Frac}(A/p)$.

3.3.4 Sur l'évaluation des fonctions. Lorsqu'on travaille avec des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos, c'est-à-dire dans le cadre de la géométrie algébrique classique, la notion de valeur $f(x)$ qui vient d'être introduite est la même que la notion usuelle : pour un ensemble algébrique V défini par un idéal $I \subset k[t_1, \dots, t_n]$, la bijection $V \xrightarrow{\sim} \text{Spm } \Gamma(V)$ fait correspondre à un point $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ l'idéal maximal $m_x = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n) \subset \Gamma(V)$, et le morphisme d'évaluation $\Gamma(V) \rightarrow k, f \mapsto f(x)$ induit un isomorphisme $\Gamma(V)/m_x \simeq k$.

Lorsqu'on ne travaille pas sur un corps algébriquement clos, et a fortiori lorsque A n'est pas une algèbre sur un corps, les corps résiduel A/p sont distincts en général. Au prix d'accepter que l'ensemble $\kappa(x)$ qui reçoit la valeur $f(x)$ dépend de x , on peut associer à f une application :

$$\tilde{f} : X \longrightarrow \prod_{x \in X} \kappa(x).$$

L'expérience montre que cette subtilité n'est pas un grand obstacle pour manipuler de telles fonctions de manière aussi souple que ce que l'on a toujours fait. Notons que les corps $\kappa(x)$ contiennent tous des éléments 0 et 1, de sorte que des ensembles comme

$$Z(f) = \{x \in X, f(x) = 0\}$$

(ce n'est rien d'autre que le fermé $V(f)$!) ou $\{x \in X, f(x) = 1\}$ ont un sens clair.

3.3.5 Exemple. Si $A = \mathbb{Z}$, on a $X = \{(0), (2), (3), (5), \dots\}$ et les corps résiduels sont $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \dots$. La fonction $f = 28$ prend les valeurs $f(0) = 28 \in \mathbb{Q}, f(2) = 0 \in \mathbb{F}_2, f(3) = 1 \in \mathbb{F}_3, f(5) = 3 \in \mathbb{F}_5, \dots$.

3.3.6 L'anneau local en un point. Nous allons définir les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ de $X = \text{Spec } A$. Pour l'instant, nous adopterons une définition un peu ad hoc ; cette définition ainsi que la notation $\mathcal{O}_{X,x}$ apparaîtront plus naturelles une fois abordées la notion de faisceau et la définition générale d'un schéma. Pour motiver la définition, rappelons que pour l'étude locale d'un espace topologique X , un outil précieux est la notion de *germe* noté f_x d'une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de x . Il s'agit de la classe d'équivalence de f , pour la relation définie par

$$(f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}) \sim (f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}) \quad \text{ssi} \quad f_1|_V = f_2|_V \quad \text{pour un certain voisinage } V \subset U_1 \cap U_2 \text{ de } x.$$

Voir la discussion qui suit le Cor. 2.7 dans [Ei95], ou le § 4.3.3 de [Ra22].

Pour une telle fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, si $f(x) \neq 0$, il existe un voisinage V de x sur lequel f ne s'annule pas. Alors $f|_V$ est inversible ainsi que son germe f_x . Nous retiendrons cette propriété pour définir l'anneau des germes de fonctions en un point $x = [p]$ de $X = \text{Spec } A$: il s'agit de rendre inversibles les fonctions f qui ne s'annulent pas en x , c'est-à-dire les $f \in A \setminus p$. L'anneau obtenu est donc, par définition, le localisé A_p dont l'exercice suivant donne les propriétés de base.

3.3.7 Exercice (L'anneau local A_p). On appelle *anneau local de A en un premier p* l'anneau $A_p := S^{-1}A$ localisé de A par rapport à la partie multiplicative $S = A \setminus p$. Démontrez que :

1. L'anneau A_p est local ([Ei95, § 0.1], [Mat89, § 1]), d'idéal maximal l'idéal pA_p .
2. Le corps résiduel $\kappa(p) := A_p/pA_p$ est canoniquement isomorphe à $\text{Frac}(A/p)$.

3.3.8 Définition. Soit $X = \text{Spec } A$ et $x = [p]$ un point. Soit $f \in A$ une fonction.

- On appelle *anneau local en x* , ou *anneau des germes de fonctions en x* , l'anneau

$$\mathcal{O}_{X,x} := A_p.$$

C'est un anneau local d'idéal maximal $m_x = pA_p$ et de corps résiduel $\kappa(x) = A_p/pA_p$.

- On note $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ le *germe* de f en x , et $f(x) \in \kappa(x)$ la *valeur* de f en x .

3.3.9 Exercice. Soit $f \in A$ une fonction sur l'espace $X = \text{Spec } A$. Démontrez les faits suivants.

1. $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$ si et seulement si f est inversible dans A .
2. $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$ si et seulement si f est nilpotente dans A .

Ainsi les valeurs $\{f(x)\}_{x \in X}$ ne déterminent pas f . Les germes $\{f_x\}_{x \in X}$ sont plus utiles pour cela :

3. f est déterminée par ses germes : si $f_x = g_x$ pour tout $x \in X$, alors $f = g$.

(*Indications : se ramener au cas où $g = 0$. Ensuite, si $f \neq 0$, considérer un idéal maximal m contenant l'annulateur $\text{Ann}(f) = \{a \in A, af = 0\}$ et montrer que $f_x \neq 0$ avec $x = [m]$.)*)

A	$X = \text{Spec } A$
p	x
$V(p)$	$\overline{\{x\}}$
A_p	$\mathcal{O}_{X,x}$
pA_p	m_x
$\text{Frac}(A/p) = A_p/pA_p$	$\kappa(x)$
$f \in p$	$f(x) = 0$

FIGURE 8 – Correspondance entre notations algébriques et géométriques

4 Catégories

À partir de cette section, quelques connaissances sur les modules et les produits tensoriels pourront être utiles et le lecteur, la lectrice pourrait apprécier de parcourir le résumé fourni dans l'Appendice A. Dans la présente section ces connaissances apparaîtront surtout en guise d'illustration ; dans la section 5 elles seront au service des faisceaux de modules et de leur formalisme ; à partir de la section 7 les modules seront omniprésents.

4.1 Catégories

La théorie des catégories est basée sur l'idée que dans l'étude d'une famille donnée d'objets mathématiques, les applications entre ces objets sont aussi importantes que les objets eux-mêmes. Nous utiliserons seulement les notions de base sur les catégories. Des références possibles pour compléter ces quelques éléments sont les livres de Leinster [Le14] et MacLane [Mac78].

4.1.1 Définition. Une *catégorie* \mathcal{C} consiste en les données suivantes :

- une classe (ou collection) $\text{Ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés *objets* de \mathcal{C} ,¹
- des ensembles notés $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* entre X et Y , pour chaque paire d'objets X, Y ,
- des applications $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ appelées *compositions* et notées $(f, g) \mapsto g \circ f$, pour chaque triplet d'objets X, Y, Z , qui forment une loi associative possédant des éléments neutres à droite et à gauche notés $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ et appelés *identités*, pour tout objet X de \mathcal{C} .

On note souvent $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ou simplement $X \in \mathcal{C}$ pour dire que X est un objet de \mathcal{C} . On note souvent $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On note souvent gf au lieu de $g \circ f$.

4.1.2 Exemples (Catégories familières).

1. La catégorie Ens des ensembles, avec pour morphismes les applications d'ensembles.
2. La catégorie Grp des groupes avec pour morphismes les morphismes de groupes.
3. La catégorie $\text{Mod}(A)$ des modules sur un anneau A ; la catégorie $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens.
4. La catégorie Ann des anneaux commutatifs unitaires.
5. La catégorie des variétés différentielles.
6. La catégorie Ens^* des ensembles pointés (X, x) , avec X un ensemble et $x \in X$ un élément, avec pour morphismes les applications $f : X_1 \rightarrow X_2$ telles que $f(x_1) = x_2$.
7. La catégorie Top^* des espaces topologiques pointés.
8. Les catégories Ens^{inj} , Ens^{surj} , Ens^{bij} dont les objets sont les ensembles, et les morphismes sont les applications injectives, resp. surjectives, resp. bijectives. Idem Grp^{inj} , Grp^{surj} , Grp^{bij} .

4.1.3 Exemples (Quelques constructions de base).

1. À toute catégorie \mathcal{C} on associe sa catégorie *opposée* \mathcal{C}° définie par $\text{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Le fait que \mathcal{C}° soit une catégorie reflète une symétrie des axiomes de la définition de catégorie.

1. La nature mathématique (classe ou ensemble) de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ est un point délicat qui est traité différemment selon les auteurs. Expliquons ceci très brièvement avec l'exemple de la catégorie des ensembles, i.e. la catégorie notée Ens dont les objets sont les ensembles et les applications sont les simples applications ensemblistes. Certains auteurs prennent pour $\text{Ob}(\text{Ens})$ la classe de *tous* les ensembles; elle ne peut alors pas elle-même être un ensemble, à cause du paradoxe de Russell. D'autres préfèrent travailler avec une catégorie $(U\text{-Ens})$ dont les objets, les ensembles éléments d'un *univers* U fixé, forment un véritable ensemble. On pourra lire [Mac78], chap. I, § 6 pour plus de détails.

- À tout ensemble partiellement ordonné (X, \leq) on associe une catégorie \mathcal{C}_X dont les objets sont les éléments de X , et $\text{Hom}(x, y)$ est un singleton si $x \leq y$ et vide sinon. Il est clair que \mathcal{C}_X° est la catégorie associée à l'ensemble X muni de l'ordre opposé, c'est-à-dire (X, \geq) .
- Soit \mathcal{C} une catégorie. La *catégorie des morphismes* notée $\text{Mor}(\mathcal{C})$ a pour objets les morphismes $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} ; les morphismes entre $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ et $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ sont les paires $(u : X_1 \rightarrow X_2, v : Y_1 \rightarrow Y_2)$ qui forment un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{u} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{v} & Y_2. \end{array}$$

- Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux catégories. La *catégorie produit* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ a pour objets les paires (X_1, X_2) d'objets de \mathcal{C}_1 resp. \mathcal{C}_2 , et les morphismes entre (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont les paires $(f_1 : X_1 \rightarrow Y_1, f_2 : X_2 \rightarrow Y_2)$ de morphismes dans \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

4.1.4 Exercice (Vérifier qu'on a compris la définition abstraite). Décrivez la catégorie à trois objets dont le diagramme suivant suggère la définition :

$$\bullet \rightrightarrows \bullet \longrightarrow \bullet$$

Combien de morphismes différents possède-t-elle ?

4.1.5 Définition. Soit \mathcal{C} une catégorie. Une *sous-catégorie* \mathcal{D} de \mathcal{C} est la donnée d'une sous-classe d'objets $\text{Ob}(\mathcal{D})$ de $\text{Ob}(\mathcal{C})$ et, pour chaque paire d'objets $X, Y \in \mathcal{C}$ d'un sous-ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, telle que \mathcal{D} contient les identités et est stable par composition. On dit que \mathcal{D} est une sous-catégorie *pleine* si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tous X, Y .

On notera que pour spécifier une sous-catégorie pleine, il suffit de spécifier ses objets.

4.1.6 Exemples.

- $\text{Ab} \subset \text{Grp}$ est une sous-catégorie pleine.
- Notons Ann_0 la catégorie des anneaux commutatifs, non nécessairement unitaires. Par exemple, tout idéal I d'un anneau commutatif unitaire A est un objet de Ann_0 et l'inclusion $I \hookrightarrow A$ est un morphisme. Alors Ann est une sous-catégorie de Ann_0 qui n'est pas pleine : par exemple, l'application de duplication $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$ est un morphisme de Ann_0 mais pas de Ann . On notera que Ann_0 contient de nombreux anneaux très intéressants. Par exemple notons A l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont \mathcal{C}^∞ et à support compact. Le produit ponctuel $h = f \cdot g$ défini par $h(x) = f(x)g(x)$ fait de A un objet de Ann_0 qui ne contient pas d'élément 1, essentiellement car la fonction constante égale à 1 n'est pas à support compact. De même, le produit de convolution $h = f \star g$ défini par $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$ fait de A un objet de Ann_0 qui ne contient pas d'élément 1, essentiellement car la masse de Dirac en 0 n'est pas une fonction. (Les justifications introduites par le mot « essentiellement » n'en sont pas vraiment et nous invitons la lectrice à les remplacer par des arguments rigoureux.)

3. Le foncteur $\omega : \text{Ann}_0 \rightarrow \text{Ab}$ qui envoie un anneau commutatif unitaire A sur son groupe additif abélien sous-jacent ne fait pas de Ann_0 une sous-catégorie de Ab , car sur un groupe abélien donné il peut exister plusieurs structures différentes d'anneau : on vient de le voir pour les fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact.

La définition suivante vise à fournir un analogue catégorique des injections, surjections et bijections. On doit recourir à une formulation adaptée car les objets d'une catégorie ne sont pas des ensembles (voir l'exemple des catégories de morphismes dans 4.1.3), et ne possèdent pas d'éléments.

4.1.7 Définition. Soit \mathcal{C} une catégorie et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans \mathcal{C} . On dit que f est :

- un *monomorphisme* (ou simplement un *mono*) si pour toute paire de morphismes $g, h : W \rightarrow X$ telle que $fg = fh$, on a $g = h$.
- un *épimorphisme* (ou simplement un *épi*) si pour toute paire de morphismes $g, h : Y \rightarrow Z$ telle que $gf = hf$, on a $g = h$.
- un *isomorphisme* (ou simplement un *iso*) s'il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $gf = \text{id}_X$ et $fg = \text{id}_Y$.

On notera que dans une catégorie \mathcal{C} , un iso est mono et épi.

4.1.8 Exercice (Monos, épis, isos dans Ens). Dans la catégorie des ensembles $\mathcal{C} = \text{Ens}$, démontrez que les monos, épis, isos sont les injections, surjections, bijections, respectivement. En particulier, dans cette catégorie un morphisme qui est mono et épi est iso.

4.1.9 Exercice (Contre-exemples). Montrez les faits suivants.

1. Dans la catégorie Ann , le morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ est un mono et un épi mais pas un iso. Plus généralement, pour un morphisme de localisation $u : A \rightarrow S^{-1}A$ (exercice 3.1.5) démontrez les faits suivants : (i) u est un monomorphisme ssi S est composée de non diviseurs de 0 ; (ii) u est toujours un épimorphisme ; (iii) u est un isomorphisme ssi $S \subset A^\times$.
2. Dans la catégorie des variétés différentielles, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'élévation au cube est bijective, un mono et un épi, mais pas un iso.

4.1.10 Exercice (Vérifier qu'on a compris la définition abstraite, bis). Quels sont les monos, les épis, les isos de la catégorie \mathcal{C} décrite dans l'exercice 4.1.4 ? À partir du diagramme qui définit \mathcal{C} , on définit une nouvelle catégorie \mathcal{D} dans laquelle on décrète que les deux compositions possibles ca et cb des flèches a, b, c dessinées sont égales. Quels sont les monos, les épis, les isos de \mathcal{D} ?

4.1.11 Exercice (Monos et épis des catégories de morphismes). Décrivez les monos et les épis d'une catégorie de morphismes $\text{Mor}(\mathcal{C})$ comme dans 4.1.3.3.

4.1.12 Exercice (Monomorphismes des groupes abéliens divisibles). On dit qu'un groupe abélien D est *divisible* si pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, l'endomorphisme $n : D \rightarrow D$ de multiplication par n est surjectif. Démontrez les faits suivants.

1. Les groupes $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, S^1, \mu_\infty(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^\times, z^n = 1 \text{ pour un } n \geq 0\}$ sont divisibles.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Le groupe $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}, z^{p^n} = 1 \text{ pour un } n \geq 0\}$ est divisible.
3. Un groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}e_i$ ne contient aucun sous-groupe divisible non nul.

4. Un quotient d'un groupe divisible est divisible.
5. On note Div la sous-catégorie pleine de Ab dont les objets sont les groupes abéliens divisibles. Un morphisme $f : D \rightarrow D'$ dans Div est un monomorphisme si et seulement si son noyau $\ker(f) = \{x \in D; f(x) = 0\}$ ne contient aucun sous-groupe divisible non nul.
6. Utilisant 3. et 4. donnez des exemples de monomorphismes non injectifs dans Div .

4.1.13 Exercice (Épimorphismes des espaces topologiques Hausdorff). On note Haus la sous-catégorie pleine de Top dont les objets sont les espaces topologiques Hausdorff.

1. Montrez qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans Haus (c'est-à-dire une application continue) est un épimorphisme ssi son image est dense.
2. Donnez des exemples d'épimorphismes non surjectifs dans Haus .

4.1.14 Définition (Objet initial/terminal; zéro) Soit \mathcal{C} une catégorie.

- Un objet \emptyset est *initial* si pour tout $X \in \mathcal{C}$ il existe exactement un morphisme $\emptyset \rightarrow X$.
- Un objet \star est *terminal* si pour tout $X \in \mathcal{C}$ il existe exactement un morphisme $X \rightarrow \star$.
- Un objet 0 est *zéro* s'il est initial et terminal.

4.1.15 Exercice (Exemples d'objets initiaux et terminaux).

1. Les catégories Ens , Ens^* , Grp , Ab , Ann possèdent-elles des objets initial, terminal, zéro ?
2. On suppose que \mathcal{C} possède un objet zéro noté 0 . Démontrez que pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$ il existe un unique morphisme $0_{XY} : X \rightarrow Y$ qui se factorise à travers 0 . Démontrez que $g \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$ pour tout $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ et que $0_{XY} \circ h = 0_{ZY}$ pour tout $h \in \text{Hom}(Z, X)$.

4.2 Foncteurs

4.2.1 Définition. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories. Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée de :

- un objet $F(X) \in \mathcal{D}$ pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$,
- un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} ,

de telle sorte que $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour tous f, g composables.

Un *foncteur contravariant* de \mathcal{C} dans \mathcal{D} est un foncteur $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$; à chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} il associe donc un morphisme $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$.

4.2.2 Exemples.

1. On définit un foncteur $\omega : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ en associant à un groupe son ensemble sous-jacent. Ce foncteur « oublie » une partie de la structure et est donc appelé un *foncteur d'oubli*.
2. Associons à tout ensemble X l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de ses parties. On peut étendre \mathcal{P} en un foncteur de diverses manières, selon la définition choisie pour l'image d'une application $f : X \rightarrow Y$:
 - (a) si on lui associe l'application $\mathcal{P}_1(f) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ qui envoie une partie $A \subset X$ sur l'image $f(A)$, on définit un foncteur covariant $\mathcal{P}_1 : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$.
 - (b) si on lui associe l'application $\mathcal{P}_2(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui envoie une partie $B \subset Y$ sur la préimage $f^{-1}(B)$, on définit un foncteur contravariant $\mathcal{P}_2 : \text{Ens}^\circ \rightarrow \text{Ens}$.

3. Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ d'un espace topologique pointé est un foncteur $\text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$.

4.2.3 Remarque. Insistons sur le fait que selon notre définition, un foncteur contravariant est un foncteur $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$. En particulier :

1. la formulation « soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur contravariant de \mathcal{C} dans \mathcal{D} » que l'on trouve parfois dans la littérature est imprécise et nous l'éviterons ;
2. à $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$ on peut associer de manière bijective un foncteur $G = F^\circ : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^\circ$, mais c'est bien F qui est le foncteur contravariant de \mathcal{C} dans \mathcal{D} et $G = F^\circ$ est son *opposé*.

4.2.4 Exercice. Soient Int la catégorie des anneaux (commutatifs unitaires) intègres et Corps celle des corps (commutatifs).

1. Le centre d'un groupe G est un groupe abélien $Z(G)$. Cette construction s'étend-elle en un foncteur $Z : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$? Ou au moins sur une certaine sous-catégorie de Grp ?
2. Le corps des fractions d'un anneau intègre A est un corps commutatif $\text{Frac}(A)$. Cette construction s'étend-elle en un foncteur $\text{Frac} : \text{Int} \rightarrow \text{Corps}$? Sur une certaine sous-catégorie de Int ?

4.2.5 Remarques.

1. On peut composer deux foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ de manière évidente. On obtient une catégorie des catégories, dont les morphismes sont les foncteurs.
2. Il est fréquent de définir un foncteur en donnant seulement les valeurs $F(X)$ des objets, lorsque les valeurs $F(f)$ des morphismes sont faciles à trouver avec le contexte. Par exemple, si \mathcal{C} est une catégorie et $X \in \mathcal{C}$ un objet fixé, on définit un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ en posant $F(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. (Comment est défini $F(f)$, pour un morphisme $f : Y_1 \rightarrow Y_2$?) De même, si Y est fixé, on définit un foncteur $G : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$ en posant $G(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. (Même question.) On dit que Hom est un *bifoncteur*, contravariant en la première variable, covariant en la seconde.
3. On prendra garde au fait que l'image d'un foncteur (définie de la manière naturelle) n'est pas une sous-catégorie en général.

4.2.6 Définition. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. On dit que F est un *isomorphisme de catégories* s'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$.

4.2.7 Motivation pour les équivalences de catégories. La notion d'isomorphisme de catégories est naturelle, mais elle est souvent trop rigide dans les applications. En particulier, des isomorphismes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ induisent des bijections entre les classes d'objets des catégories, alors que la pratique fournit des catégories très semblables où ceci est loin d'être vrai.

Pour comprendre ceci, un exemple vaut mieux que de longs discours. Soit $E_0 = \{e_0\}$ un ensemble ponctuel, c'est-à-dire de cardinal un. Il est clair que chaque ensemble X possède une unique application $X \rightarrow E_0$, en d'autres termes E_0 est un *objet terminal* de Ens , voir 4.1.14 et 4.1.15. En particulier, pour tout autre ensemble ponctuel $E = \{e\}$, il existe une unique application $E \rightarrow E_0$. Cette propriété d'existence et d'unicité permet d'identifier tous les objets terminaux à E_0 sans qu'il n'en résulte d'ambiguïté dans les raisonnements ultérieurs mettant en jeu un objet terminal dans la catégorie des ensembles. On dit alors que l'isomorphisme $E \simeq E_0$ est *canonique* et on le note souvent comme une égalité $E = E_0$.

Concrètement, alors que la sous-catégorie pleine \mathcal{T} des objets terminaux de Ens possède autant d'objets que d'ensembles à un élément (et il y en a beaucoup!), elle se comporte comme la *catégorie ponctuelle* \star composée d'un seul objet avec un seul morphisme, l'identité de cet objet. La notion adaptée pour décrire cet exemple et bien d'autres est celle d'équivalence de catégories (le lemme 4.2.12 ci-dessous montrera que l'unique foncteur $F : \mathcal{T} \rightarrow \star$ est une équivalence). Voici deux définitions pour l'introduire.

4.2.8 Définition. Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs de mêmes source et but.

1. On appelle *transformation naturelle*, ou simplement *morphisme de foncteurs*, notée $u : F \rightarrow G$, la donnée d'un morphisme $u(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$, de telle sorte que $G(\alpha) \circ u(X) = u(Y) \circ F(\alpha)$ pour tout morphisme $\alpha : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{u(X)} & G(X) \\ F(\alpha) \downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ F(Y) & \xrightarrow{u(Y)} & G(Y) \end{array}$$

On peut composer les morphismes de foncteurs de manière naturelle.

2. On appelle *catégorie des foncteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{D}* , notée $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, la catégorie dont les objets sont les foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} , et les morphismes sont les transformations naturelles. Dans cette catégorie, la notion générale d'isomorphisme s'exprime en disant que $u : F \rightarrow G$ est un iso lorsqu'il existe $v : G \rightarrow F$ tel que $v \circ u = \text{id}_F$ et $u \circ v = \text{id}_G$.

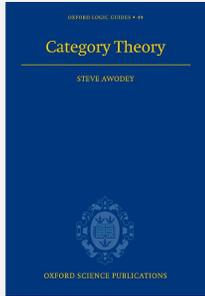
4.2.9 Exemple. Le *foncteur diagonal* $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ est défini comme suit : pour tout $D \in \mathcal{D}$, le foncteur $\Delta_D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ envoie tous les objets sur D et tous les morphismes sur id_D . La terminologie « foncteur diagonal » provient du cas où $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\}$ puisqu'on a alors $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \mathcal{D}^n$ et $\Delta_D = (D, \dots, D)$. Une autre terminologie possible est « foncteur constant » puisque Δ_D est le foncteur constant de valeur D .

4.2.10 Définition. Une *équivalence de catégories* est un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel qu'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes de foncteurs $G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$. Le foncteur G est alors appelé un *quasi-inverse* pour F .

Dans ce cas, le foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est aussi une équivalence, appelée *quasi-inverse* de F . Attention : un quasi-inverse est loin d'être unique en général (voir l'exercice 4.2.13.2).

4.2.11 Définition. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. On dit que F est :

- *plein* si les applications $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ sont injectives,
- *fidèle* si les applications $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ sont surjectives,
- *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle,
- *essentiellement surjectif* si tout $Y \in \mathcal{D}$ est isomorphe à FX , pour un $X \in \mathcal{C}$.



« Experience has shown that the mathematically significant properties of objects are those that are invariant under isomorphisms, and in category theory, identity of objects is a much less important relation than isomorphism. So it is really equivalence of categories that is the more important notion of “similarity” for categories. One can think of equivalence of categories as “isomorphism up to isomorphism”. »

FIGURE 9 – Citation de Steve Awodey, *Category Theory*, § 7.8 [Aw06]

Par exemple, toute sous-catégorie $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ détermine un foncteur d’inclusion $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ qui est fidèle mais n’est plein que si \mathcal{D} est une sous-catégorie pleine. (La lectrice connaît-elle des exemples naturels de sous-catégories non pleines?)

La notion de foncteur pleinement fidèle est en quelque sorte l’analogie de la notion de fonction injective. En effet, en notant avec un signe \simeq la relation d’isomorphisme, on peut voir que si F est pleinement fidèle alors $FX \simeq FY$ implique $X \simeq Y$ (la lectrice peut le vérifier, ce n’est pas complètement immédiat). De même, la notion de foncteur essentiellement surjectif est l’analogie de la notion de fonction surjective. Dès lors, le résultat qui suit semble naturel.

4.2.12 Lemme. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une équivalence si et seulement s’il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Démonstration : Voir [Le14], Prop. 1.3.18 ou [Mac78], chap. IV, § 4, th. 1 ou [Aw06], Prop. 7.25. Noter que la partie « si » utilise une forme forte de l’axiome du choix. \square

4.2.13 Exercice (Exemples d’équivalences). Démontrez les faits suivants.

1. Si k est un corps algébriquement clos, les foncteurs $X \mapsto \Gamma(X)$ et $A \mapsto \text{Spm}(A)$ sont des équivalences de catégories inverses entre la catégorie des ensembles algébriques affines sur k et la catégorie des k -algèbres de type fini réduites. (C’est essentiellement une reformulation du Nullstellensatz 2.3.2.)
2. Soit \star la catégorie composée d’un seul objet avec un seul morphisme, l’identité de cet objet. Soit \mathcal{C} une catégorie telle que pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$ il existe un unique morphisme $X \rightarrow Y$. Alors l’unique foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \star$ est une équivalence de catégories. Décrivez tous ses quasi-inverses.

4.2.14 Exercice (« Morita commutatif »). Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit $I : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(A)$ le foncteur identité de la catégorie des A -modules. On note C l’ensemble des endomorphismes de I (ou transformations naturelles de I dans lui-même); comme ceux-ci peuvent être additionnés et composés entre eux, l’ensemble C porte une structure d’anneau.

1. Définissez une application $f : A \rightarrow C$ de la manière suivante. Montrez que pour chaque $a \in A$, les applications $a_M : M \rightarrow M, x \mapsto ax$ de multiplication par a dans un module M définissent un endomorphisme $f(a) : I \rightarrow I$. Démontrez que f ainsi obtenu est un morphisme d’anneaux.

2. Soit $c \in C$. On note A_A l'anneau A vu comme un A -module. Utilisant le fait que $c_A : A_A \rightarrow A_A$ commute avec tous les endomorphismes de A_A , démontrez que c_A est la multiplication par un élément $a \in A$. Utilisant le fait que c est une transformation naturelle, montrez que $f(a) = c$. Montrez ensuite que f est un isomorphisme.
3. Déduisez-en que si $\text{Mod}(A)$ est équivalente à $\text{Mod}(B)$, alors A est isomorphe à B .

Le titre de l'exercice vient du théorème plus général suivant, dû à Morita : *soient A, B deux anneaux non nécessairement commutatifs, si les catégories de modules $\text{Mod}(A)$ et $\text{Mod}(B)$ sont équivalentes, alors les centres $Z(A)$ et $Z(B)$ sont des anneaux isomorphes* (voir Lam [La99], cor. 18.42).

4.3 Lemme de Yoneda

4.3.1 Définition. Soient \mathcal{C} une catégorie et $X \in \mathcal{C}$. On définit :

- le *foncteur des points de X* , noté $h_X : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$, par $h_X(T) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$.
- le *foncteur des copoints de X* , noté $h'_X : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$, par $h'_X(T) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$.

Un morphisme $T \rightarrow X$ est appelé un *point de X à valeurs dans T* .

Nous verrons que dans la théorie des schémas, les foncteur de points, comme plus généralement les foncteurs $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$, sont extrêmement utiles. Pour cette raison, on leur donne un nom.

4.3.2 Définition. On appelle *préfaisceau* (d'ensembles) sur \mathcal{C} un foncteur $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$. On note $\widehat{\mathcal{C}} := \text{Hom}(\mathcal{C}^\circ, \text{Ens})$ la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{C} .

L'objet $h_X \in \widehat{\mathcal{C}}$ est fonctoriel en X (voir 4.2.5.2) ce qui signifie que l'on a un foncteur :

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}, \quad X \longmapsto h_X$$

(et les mêmes choses sont vraies pour h'_X). L'énoncé célèbre qui va suivre porte sur ce foncteur. Pour l'introduire, considérons un préfaisceau $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$. Pour tout morphisme de préfaisceaux $u : h_X \rightarrow F$, on dispose en particulier de $u_X : h_X(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow F(X)$ et on peut considérer l'image de l'identité $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ par cette application.

4.3.3 Lemme (de Yoneda). *Pour tout foncteur $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$, l'application*

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \longrightarrow F(X), \quad u \longmapsto u_X(\text{id}_X)$$

est une bijection. En particulier, pour tout $Y \in \mathcal{C}$ l'application

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

est une bijection, c'est-à-dire que le foncteur $h : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est pleinement fidèle. (Il en va de même pour $h' : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fonct}(\mathcal{C}, \text{Ens})$, $X \mapsto h'_X$.)

Démonstration : Donnons la bijection réciproque. Pour cela observons qu'à chaque morphisme $a : T \rightarrow X$ dans \mathcal{C} est associé un morphisme $F(a) : F(X) \rightarrow F(T)$ dans Ens . Avec ces notations, la bijection réciproque de l'application de l'énoncé est :

$$F(X) \longrightarrow \text{Hom}(h_X, F), \quad \xi \longmapsto (a \mapsto F(a)(\xi)).$$

La vérification de ceci est un long exercice de déroulement des définitions, qui ne demande que de la patience et de la méthode, et qu'« il faut avoir fait une fois dans sa vie » selon la classique expression.

Pour un objet $Y \in \mathcal{C}$ et $F = h_Y$, il est facile de vérifier que l'application que nous venons de décrire n'est autre que l'application naturelle $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(h_X, h_Y)$, qui envoie $\xi : X \rightarrow Y$ sur la postcomposition par ξ . L'énoncé de bijectivité est donc le synonyme exact du fait que h est pleinement fidèle.

Les énoncés analogues pour h' s'en déduisent, en considérant la catégorie opposée \mathcal{C}° . Pour plus de détails, consulter [Le14, Chap. 4] ou [Mac78, § III.2]. \square

mathoverflow

"Philosophical" meaning of the Yoneda Lemma

▲

152

▼

In his Algebraic Geometry class a few years back, Ravi Vakil explained Yoneda's lemma like this: You work at a particle accelerator. You want to understand some particle. All you can do are throw other particles at it and see what happens. If you understand how your mystery particle responds to all possible test particles at all possible test energies, then you know everything there is to know about your mystery particle.

Share Cite Edit Follow Flag

answered Oct 29, 2009 at 6:57

community wiki
Theo Johnson-Freyd

FIGURE 10 – Signification philosophique du lemme de Yoneda
<https://mathoverflow.net/.../philosophical-meaning-of-the-yoneda-lemma>
 (page consultée le 25 octobre 2024)

4.3.4 Définition. Soient \mathcal{C} une catégorie et $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$, $F' : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ deux foncteurs.

- On dit que F est *représentable* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : F \simeq h_X$ pour un certain objet $X \in \mathcal{C}$. On dit alors que la paire (X, α) (ou simplement X) *représente* F .
- De même, on dit que F' est *coreprésentable* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $F' \simeq h_{X'}$ pour un certain objet $X' \in \mathcal{C}$.

Le lemme de Yoneda garantit que si un foncteur $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$ est représentable, alors l'objet X qui le représente est unique à un unique isomorphisme près. En effet, si l'on dispose de deux isomorphismes $\alpha : F \simeq h_X$ et $\beta : F \simeq h_Y$ alors l'isomorphisme $\beta \circ \alpha^{-1} : h_X \rightarrow h_Y$ provient d'un unique isomorphisme $u : X \rightarrow Y$.

4.3.5 Lien avec la notion de propriété universelle. la lectrice est sans doute familière avec la situation dans laquelle un objet $X \in \mathcal{C}$ vérifie une certaine propriété universelle. Cette terminologie est équivalente à dire que l'on a défini un certain foncteur F et que X le représente. Donnons deux exemples simples pour illustrer ceci.

1. Considérons un groupe G et un sous-groupe distingué H . Pour tout groupe K , notons $F(K)$ l'ensemble des morphismes de groupes $f : G \rightarrow K$ dont le noyau contient H . Ceci définit un foncteur $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$. La propriété universelle du quotient $\pi : G \rightarrow G/H$ signifie que F est coreprésentable par la paire composée de G/H et de l'isomorphisme de foncteurs en K :

$$h'_{G/H}(K) = \text{Hom}(G/H, K) \xrightarrow{\simeq} F(K), \quad (u : G/H \rightarrow K) \mapsto (u \circ \pi : G \rightarrow K).$$

2. Soient A un anneau et M, N deux A -modules. Alors le foncteur qui à un A -module P associe l'ensemble $\text{Bilin}_A(M, N; P)$ des applications A -bilinéaires $u : M \times N \rightarrow P$ est coreprésentable par le module produit tensoriel, voir le théorème A.0.7.
3. Fixons un ensemble à un élément \star et définissons un foncteur $F : \text{Ens}^\circ \rightarrow \text{Ens}$ par $F(X) = \star$. La définition d'un objet terminal affirme que tout ensemble ponctuel E_0 représente F (on pourrait prendre $E_0 = \star$ mais ces deux ensembles jouent des rôles différents). La discussion du paragraphe 4.2.7 montre que, parmi les objets qui représentent F , il est vain d'en chercher un qui soit « plus joli » ou « plus naturel » que les autres ; la propriété d'*existence et unicité à isomorphisme canonique près* est le mieux que l'on puisse espérer. Cette maxime s'applique au groupe quotient G/H et à tous les autres objets vérifiant une propriété universelle.

4.3.6 Exercice. Soient un groupe G et un sous-groupe H non nécessairement distingué. Pour tout groupe K , notons $F(K)$ l'ensemble des morphismes de groupes $f : G \rightarrow K$ dont le noyau contient H . Le foncteur $F : \text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$ est-il représentable ?

4.3.7 Exercice. Soient \mathcal{C} une catégorie et $X \in \mathcal{C}$ un objet. Pour tout préfaisceau $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ens}$, on pose $\text{ev}_X(F) := F(X)$. Montrez que ev_X définit un foncteur sur la catégorie des préfaisceaux, à valeurs dans la catégorie des ensembles. Quelle est sa variance ? Est-il (co)représentable ?

4.4 Adjonctions

4.4.1 Définition. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs. On dit que F est *adjoint à gauche* de G , ou que G est *adjoint à droite* de F , ou que (F, G) est une *paire adjointe*, si l'on dispose d'une bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

fonctorielle en $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{D}$ (on dit aussi *bifonctorielle en* (X, Y)). On utilise la notation

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D},$$

ou $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$, ou plus simplement $F \dashv G$ pour désigner cette adjonction.

La bifonctorialité de la bijection a pour conséquence que l'on peut la décrire entièrement en termes d'un petit nombre de données. Plus précisément, on note $\eta_X : X \rightarrow GFX$ l'image de id_{FX} par la bijection $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FX) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GFX)$ et $\epsilon_Y : FGY \rightarrow Y$ la préimage de id_{GY} par la bijection $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGY, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY)$. Ceux-ci sont fonctoriels en X et Y .

4.4.2 Définition. Soit $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une paire adjointe. On appelle :

- unité le morphisme $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$,
- co-unité le morphisme $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$.

4.4.3 Lemme. Les morphismes η, ϵ vérifient les relations triangulaires

$$\epsilon_{FX} \circ F\eta_X = \text{id}_{FX} \quad \text{et} \quad G\epsilon_Y \circ \eta_{GY} = \text{id}_{GY} \quad \text{pour tous } X, Y$$

et la bijection $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$ est décrite par :

$$\begin{aligned} u &\longmapsto Gu \circ \eta_X \\ \epsilon_Y \circ Fv &\longleftarrow v. \end{aligned}$$

Démonstration : Voir [Le14, 2.2.2, 2.2.4]. □

4.4.4 Lemme. S'ils existent, l'adjoint à droite de F et l'adjoint à gauche de G sont uniques à isomorphisme de foncteurs près.

Démonstration : Ceci découle par exemple du lemme de Yoneda ; voir [Le14], exemple 4.3.13 ou exercice 4.3.18. □

Le slogan du livre [Mac78] de Saunders MacLane (un des pères de la théorie des catégories) affirme : *Adjoint functors arise everywhere*. Dans un moment de relâchement peut-être coupable, j'ai voulu illustrer ce propos en présentant une longue liste de situations où les adjoints apparaissent. Selon son humeur, la lectrice maudira cette faiblesse, la pardonnera ou s'en amusera !

4.4.5 Exercice (Adjoints à gauche d'inclusions : réflecteurs). On considère les inclusions de sous-catégories pleines suivantes (A est un anneau commutatif et S une partie multiplicative) :

1. (groupes abéliens) \subset (groupes),
2. (groupes abéliens sans torsion) \subset (groupes abéliens),
3. (groupes d'exposant n) \subset (groupes),
4. (\mathbb{F}_p -espaces vectoriels de dim. finie) \subset (p -groupes finis),
5. (corps commutatifs) \subset (anneaux commutatifs intègres),
6. (A -algèbres dans lesquelles les éléments de S sont inversibles) \subset (A -algèbres),
7. (espaces vectoriels semi-normés) \subset (espaces vectoriels normés).

Montrez que ces inclusions possèdent des adjoints à gauche, donnés par : l'abélianisé $F(G) = G/[G, G]$, le quotient sans torsion $F(M) = M/\text{Tors}(M)$, le quotient par le sous-groupe $\langle g^n, g \in G \rangle$ engendré par les puissances n -ièmes, le quotient par le sous-groupe de Frattini $\Phi(G) = [G, G]G^p$, le corps des fractions $F(A) = \text{Frac}(A)$, le localisé $F(B) = S^{-1}B$, le quotient par le noyau de la semi-norme $F(V) = V/\ker \|\cdot\|$ (cette dernière construction est utilisée pour définir les espaces L^p).

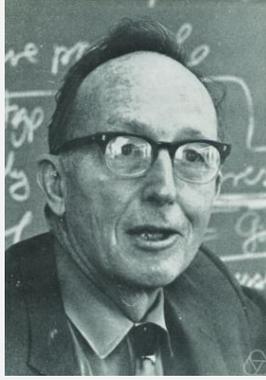


FIGURE 11 – Saunders MacLane (1909-2005)

4.4.6 Exercice (Caractérisation des réflecteurs). Soit $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une paire adjointe. Démontrez que G est plein et fidèle si et seulement si la coïunité $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme.

4.4.7 Exercice (Adjoints à droite d'inclusions : coréflecteurs).

1. Démontrez que l'inclusion (groupes abéliens sans torsion) \subset (groupes abéliens) possède un adjoint à droite, donné par $M \mapsto \text{Tors}(M)$.
2. On considère l'inclusion d'ensembles ordonnés $i : (\mathbb{Z}, \leq) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ comme un foncteur entre les catégories associées (voir 4.1.2). Démontrez que ce foncteur possède un adjoint à droite, donné par la partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Possède-t-il également un adjoint à gauche ?

4.4.8 Exercice (Images de parties). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application d'ensembles. On note $f_*(A)$ l'image directe d'une partie $A \subset X$ et $f^{-1}(B)$ l'image inverse d'une partie $B \subset Y$. Démontrez que $f_* : (\mathcal{P}(X), \subset) \rightarrow (\mathcal{P}(Y), \subset)$ est adjoint à gauche de $f^{-1} : (\mathcal{P}(Y), \subset) \rightarrow (\mathcal{P}(X), \subset)$.

4.4.9 Exercice (Adjonctions « libre \dashv oubli »). Dans de nombreuses situations en algèbre, l'oubli d'une partie de la structure, vu comme un foncteur, possède un adjoint à gauche fourni par une construction d'« objet libre ». Voici deux exemples.

1. Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I l'algèbre de polynômes $A[X_i, i \in I]$ est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à une A -algèbre commutative unitaire son ensemble sous-jacent.
2. Montrez que le foncteur qui associe à un ensemble I le groupe libre sur l'ensemble de générateurs I est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli qui associe à un groupe son ensemble sous-jacent.

4.4.10 Exercice (Adjoints à gauche de $\text{Hom}(X, -)$). Démontrez les faits suivants.

1. (Objets exponentiels) Il existe une bijection fonctorielle en les ensembles X, Y, Z :

$$\text{Hom}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}(X, \text{Hom}(Y, Z)).$$

Ainsi $(- \times Y)$ et $\text{Hom}(Y, -)$ forment une paire adjointe. Du fait de la notation alternative $Z^Y := \text{Hom}(Y, Z)$, dans une catégorie arbitraire \mathcal{C} , l'adjoint à droite de $(- \times Y)$ lorsqu'il existe est appelé « objet exponentiel ».

2. (Adjonction $\otimes \dashv \text{Hom}$) Soient A un anneau et M, N, P des A -modules.
- (a) Montrez que l'ensemble $\text{Hom}_A(N, P)$ est naturellement muni d'une structure de A -module.
- (b) Montrez qu'on a des isomorphismes fonctoriels en M, N, P :

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)).$$

4.4.11 Exercice (Adjoints de la restriction des scalaires des modules). Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. À tout B -module N on associe le A -module N_A égal à N muni de la structure A -linéaire $a \cdot n := f(a)n$ (« restriction des scalaires le long de f »). À tout A -module M on associe d'une part le B -module $M \otimes_A B$ obtenu par extension des scalaires (A.0.12), et d'autre part le B -module $\text{Hom}_A(B, M)$ où $b \in B$ agit sur $f : B \rightarrow M$ par $(bf)(x) = f(bx)$.

1. Démontrez qu'on a les adjonctions à droite et à gauche pour le foncteur $N \mapsto N_A$:
- (a) $\text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) = \text{Hom}_A(M, N_A)$,
- (b) $\text{Hom}_A(N_A, M) = \text{Hom}_B(N, \text{Hom}_A(B, M))$.
2. Démontrez l'adjonction qui généralise simultanément 4.4.10.2(b) et 4.4.11.1(b) :

$$\text{Hom}_A((M \otimes_B N)_A, P) = \text{Hom}_B(M, \text{Hom}_A(N_A, P)).$$

4.4.12 Exercice (Topologies discrète et grossière). Soient Top la catégorie des espaces topologiques et $\omega : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur d'oubli de la topologie. On peut munir tout ensemble E de la topologie *discrète* (toutes les parties sont ouvertes) pour obtenir un espace noté E^{disc} , ou de la topologie *grossière* (seuls \emptyset et E sont ouverts) pour obtenir un espace noté E^{gros} . Démontrez qu'on a les adjonctions : $\text{disc} \dashv \omega \dashv \text{gros}$.

4.4.13 Exercice (Topologies Hausdorff). Soit $\text{Haus} \subset \text{Top}$ la sous-catégorie pleine composée des espaces topologiques Hausdorff. Démontrez que cette inclusion possède un adjoint à gauche, donné par le quotient Hausdorff maximal $X \mapsto X/\sim$ où \sim est l'intersection de toutes les relations d'équivalence $R \subset X \times X$ telles que X/R est Hausdorff (voir [Le14, 5.2.8]).

4.4.14 Exercice (Quotients et points fixes). Soit G un groupe. On note $G\text{-Ens}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles munis d'une action de G , et les morphismes sont les applications $f : X \rightarrow Y$ qui sont G -équivariantes, i.e. $f(gx) = gf(x)$ pour tous $g \in G, x \in X$. Tout ensemble donne naissance à un G -ensemble X^{triv} avec action triviale $gx := x$. Montrez qu'on a des adjonctions :

$$\text{Hom}(X/G, Y) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_G(X, Y^{\text{triv}}) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_G(X^{\text{triv}}, Y) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}(X, Y^G).$$

4.4.15 Exercice (Équivalences). Montrez que si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une équivalence de catégories et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un quasi-inverse, alors (F, G) est une paire adjointe.

4.4.16 Exercice (Unicité des adjoints). Insérer ici l'exo 4.3.18 de Leinster. Éviter double emploi avec Lemme 4.4.4 ci-avant.

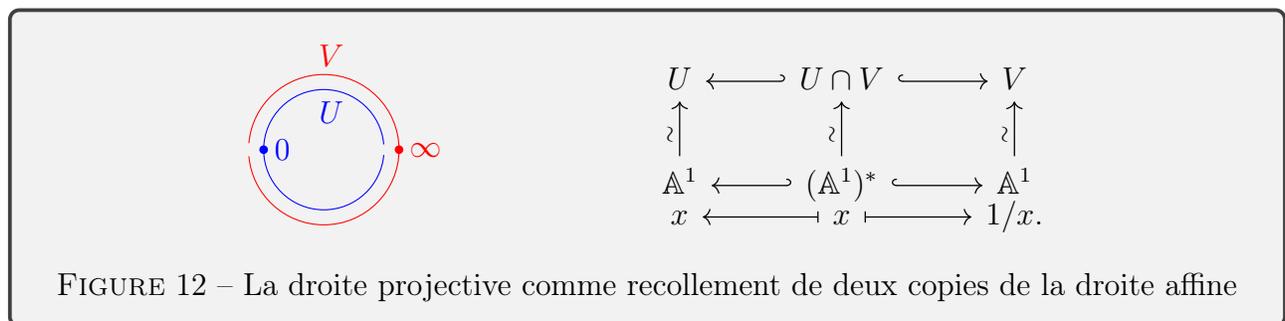
4.5 Limites et colimites

Dans une catégorie arbitraire,

- les *limites* (ou *limites inverses*, ou *limites projectives*) généralisent la notion d'intersection,
- les *colimites* (ou *limites directes*, ou *limites inductives*) généralisent la notion de réunion.

4.5.1 Motivation pour les colimites. Commençons par motiver la définition qui va suivre. L'opération de réunion d'une famille de parties dans un ensemble ambiant est familière ; les colimites en sont une généralisation au sens où elles fournissent un procédé de construction de réunion d'objets *en l'absence d'un ensemble ambiant*. Pour comprendre ce que ceci signifie, prenons deux exemples simples :

1. La construction du localisé $S^{-1}A$ d'un anneau intègre peut se faire dans le corps des fractions $K = \text{Frac}(A)$: c'est la réunion $\cup_{f \in S} A_f$ des sous-anneaux des fractions à dénominateur une puissance de f . Mais si A n'est pas intègre, on ne peut pas s'appuyer sur le corps des fractions ; les anneaux A_f sont encore reliés entre eux par des morphismes naturels $A_f \rightarrow A_g$ (pour tous $f|g$) mais ceux-ci ne sont pas toujours injectifs, voir exercice 3.1.6. Cet exemple montre qu'il est utile de considérer des « réunions » de familles d'objets reliés par des morphismes arbitraires.
2. La construction de la droite projective $X = \mathbb{P}^1$ (sur un corps k qui est sous-entendu) peut se faire en exploitant le fait qu'elle est réunion de deux ouverts $U = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ et $V = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ isomorphes à la droite affine, dont l'intersection est isomorphe à la droite affine époincée $(\mathbb{A}^1)^*$. Ceci signifie que la réunion est obtenue à partir de deux inclusions distinctes $(\mathbb{A}^1)^* \hookrightarrow \mathbb{A}^1$, comme le montre la figure 12 dont le diagramme exprime le fait qu'on construit \mathbb{P}^1 en recollant deux copies de \mathbb{A}^1 le long de leurs ouverts $(\mathbb{A}^1)^*$ identifiés par l'isomorphisme $x \mapsto 1/x$ (nous reviendrons en détail sur ce procédé de recollement dans la sous-section 6.3). Cet exemple montre qu'il est utile de considérer des « réunions » de familles d'objets reliés éventuellement par plusieurs morphismes.



Finalement il apparaît naturel de modéliser les familles d'objets $\{X_i\}_{i \in I}$ dont on souhaite prendre la réunion comme des foncteurs $X : I \rightarrow \mathcal{C}$, $i \mapsto X_i$ où I est une catégorie. Sa « réunion » est un objet C , que l'on peut voir comme un foncteur $\Delta_C : I \rightarrow \mathcal{C}$, $i \mapsto C$ (voir Exemple 4.2.9) avec un morphisme de foncteurs $X \rightarrow \Delta_C$ exprimant le fait que C « contient » les X_i , et une propriété universelle exprimant le fait que C est le « plus petit » objet contenant les X_i .

4.5.2 Définition. Soit $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur (i.e. une famille généralisée d'objets d'une catégorie). On appelle *colimite* de X un objet $C_X \in \mathcal{C}$ muni d'un foncteur $u : X \rightarrow \Delta_{C_X}$ tel que pour tout objet $D \in \mathcal{C}$ et tout foncteur $v : X \rightarrow \Delta_D$, il existe un unique morphisme $f : C_X \rightarrow D$ tel que $v = \Delta_f \circ u$. La colimite est désignée par l'un des symboles

$$\operatorname{colim} X \quad ; \quad \operatorname{colim}_{i \in I} X_i \quad ; \quad \varinjlim_{i \in I} X_i.$$

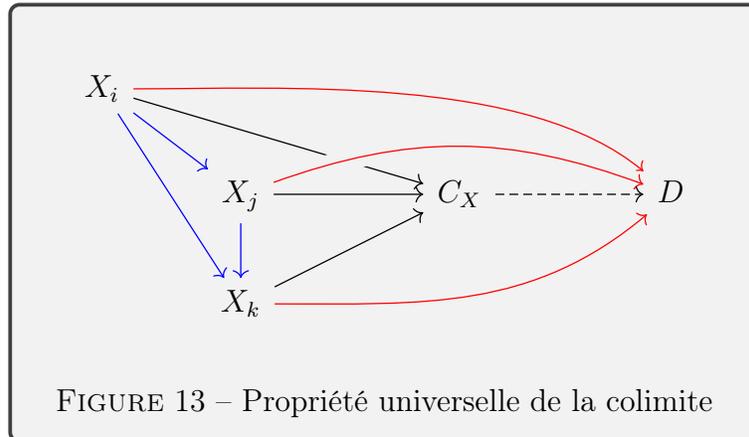
4.5.3 Remarques.

1. Pour la définition et quelques propriétés basiques, il n'est pas nécessaire d'imposer de restriction à la catégorie d'indices I . Cependant, le plus souvent l'existence des colimites nécessite que I soit *petite*, c'est-à-dire que $\operatorname{Ob} I$ soit un ensemble.
2. La propriété universelle se réécrit comme une bijection (où $\mathcal{F} = \operatorname{Fonct}(I, \mathcal{C})$) :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_X, D) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(X, \Delta_D).$$

On vérifie de plus que si tous les foncteurs $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ de source I possèdent des colimites, alors C_X est fonctoriel en X . Dans ce cas, le foncteur $C : \operatorname{Fonct}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est donc adjoint à gauche du foncteur $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \operatorname{Fonct}(I, \mathcal{C})$.

3. Dans de nombreuses références, on se contente de considérer des familles indicées par un ensemble ordonné (I, \leq) plutôt qu'une catégorie arbitraire. On parle alors de *système inductif*, qui est la donnée d'une famille d'objets $X_i, i \in I$ et d'une famille de morphismes $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ pour tous $i \leq j$, telle que $f_{ii} = \operatorname{id}_{X_i}$ pour tout i et $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ lorsque $i \leq j \leq k$. Une *colimite* de ce système est la donnée d'un objet C_X et d'une famille de morphismes $u_i : X_i \rightarrow C_X$ telle que $u_j \circ f_{ij} = u_i$ pour tous $i \leq j$, et qui est universelle avec ces propriétés.



4.5.4 Colimites d'ensembles ([Le14, 5.2.16]). La catégorie des ensembles possède toutes les colimites indicées par des petites catégories. Voici leur description précise. Rappelons que la relation d'équivalence engendrée par une partie $A \subset E \times E$ est l'intersection des relations d'équivalences $R_i \subset E \times E$ contenant A . On vérifie que la colimite de $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ est l'ensemble $(\coprod_{i \in I} X_i) / \sim$ quotient de la somme disjointe des X_i par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$x \sim X_u(x), \quad x \in X_i, u : i \rightarrow j \text{ dans } I$$

(ici on a noté $X_u : X_i \rightarrow X_j$ l'image de u par le foncteur X ; on rappelle. On note que si l'un des X_i est non vide, alors la colimite est non vide. Cette description s'adapte aux catégories de modules et d'anneaux, en remplaçant la somme disjointe par le coproduit dans ces catégories.

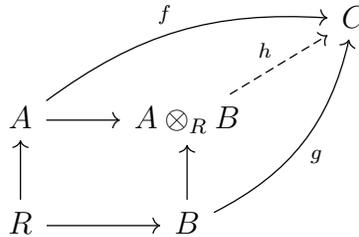
4.5.5 Exemples (Autres formes de colimites, [Le14, § 5.2]). La catégorie d'indices I est souvent appelée *forme* car elle donne forme (lorsqu'on utilise une représentation semblable à celle de l'exercice 4.1.4) au diagramme formé par les X_i , pour un foncteur $X : I \rightarrow \mathcal{C}$. Les cas particuliers les plus importants de colimites, classés par leur forme, sont les suivants :

1. les *coproduits*, aussi appelés *sommes* et notés $\sum X_i$ ou $\amalg X_i$,
2. les *sommes amalgamées* aussi appelées *pushouts* et notées $X \amalg_Z Y$,
3. les *coégalisateurs* $\text{coeq}(f, g : X \rightrightarrows Y)$ de paires de flèches,
4. les *conoyaux* $\text{coker}(f) := \text{coeq}(f, 0_{XY} : X \rightrightarrows Y)$ lorsque \mathcal{C} possède un objet 0 , voir 4.1.15,
5. divers exemples de *quotients* (par un sous-groupe, un idéal, une action de groupe).

La lectrice est invitée à dessiner la forme des diagrammes correspondants et à écrire les propriétés universelles vérifiées par ces colimites.

4.5.6 Exercice. Les catégories Ens , Ens^* , Grp , Ab , Ann possèdent-elles des coproduits de deux objets, des sommes amalgamées, des coégalisateurs ? Celles qui possèdent un objet zéro possèdent-elles des conoyaux ?

4.5.7 Exercice. Soient $R \rightarrow A$, $R \rightarrow B$ deux morphismes d'anneaux. Démontrez que la R -algèbre $A \otimes_R B$ munie de ses deux morphismes naturels $A \rightarrow A \otimes_R B$ et $B \rightarrow A \otimes_R B$ est la somme amalgamée de A et B le long de R dans la catégorie Ann , c'est-à-dire que pour toute R -algèbre C et pour tout couple de morphismes de R -algèbres $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$, il existe un unique morphisme de R -algèbres $h : A \otimes_R B \rightarrow C$ tel que $f = h \circ u$ et $g = h \circ v$.



4.5.8 Exercice (Exemples de colimites). Calculez les colimites suivantes.

1. Soit A un anneau et p un idéal premier. Si $f \notin p$, $g \notin p$ et $f|g$, on dispose d'un morphisme canonique $A_f \rightarrow A_g$ entre les localisés. On a alors la colimite dans $\mathcal{C} = \text{Ann}$:

$$A_p = \text{colim}_{f \notin p} A_f.$$

2. Soit q une puissance de nombre premier. Pour tout entier naturel n , il existe une inclusion $\mathbb{F}_{q^n} \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^{(n+1)}}$ et la clôture algébrique du corps fini \mathbb{F}_q s'identifie ainsi :

$$\overline{\mathbb{F}_q} = \text{colim}_{n \geq 0} \mathbb{F}_{q^n}.$$

3. Pour deux entiers m, n tels que $m|n$, donc $n = md$, la multiplication par d est un morphisme de groupes abéliens $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x \mapsto dx$. On a alors la colimite dans $\mathcal{C} = \text{Ab}$:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \text{colim}_{n \geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

4. On note $\mu_\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des racines de l'unité dans \mathbb{C} . Montrez que :

- (a) l'application $x \mapsto \exp(2i\pi x)$ induit des isomorphismes $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_\infty(\mathbb{C})$ et $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n(\mathbb{C})$,
 (b) la colimite de la question 3. s'identifie à une réunion $\mu_\infty(\mathbb{C}) = \cup_{n \geq 1} \mu_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^\times .

4.5.9 Motivation pour les limites. La notion de limite est duale de celle de colimite :

4.5.10 Définition. Soit $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. On appelle *limite* de X un objet $L_X \in \mathcal{C}$ muni d'un foncteur $u : \Delta_{L_X} \rightarrow X$ tel que pour tout objet $M \in \mathcal{C}$ et tout foncteur $v : \Delta_M \rightarrow X$, il existe un unique morphisme $f : M \rightarrow L_X$ tel que $v = u \circ \Delta_f$. La limite est désignée par l'un des symboles

$$\lim X \quad ; \quad \lim_{i \in I} X_i \quad ; \quad \varprojlim_{i \in I} X_i.$$

4.5.11 Remarques.

1. La propriété universelle se réécrit comme une bijection (où $\mathcal{F} = \text{Fonct}(I, \mathcal{C})$) :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Delta_M, X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, L_X).$$

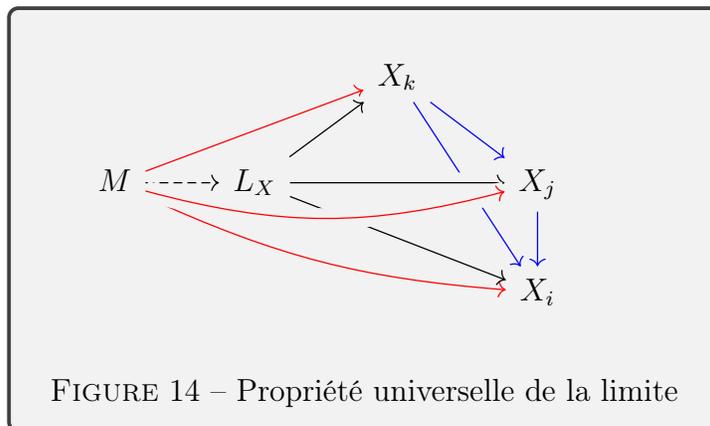
Si toutes les limites existent dans \mathcal{C} , ceci exprime le fait que le foncteur $L : \text{Fonct}(I, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto L_X$ est adjoint à droite du foncteur $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fonct}(I, \mathcal{C})$.

2. Reformulons la définition dans le cas où la catégorie d'indices est un ensemble ordonné (I, \leq) . La convention la plus courante (liée à la dualisation de la définition d'une colimite) est de considérer les familles indicées par l'ordre opposé $I^\circ = (I, \geq)$. Un *système projectif dans \mathcal{C} indicé par I* est la donnée d'une famille d'objets X_i , $i \in I$ et d'une famille de morphismes $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ pour tous $i \leq j$, telle que $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$ pour tout i et $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ lorsque $i \leq j \leq k$. Une *limite* de ce système est la donnée d'un objet L_X et d'une famille de morphismes $\pi_i : L_X \rightarrow X_i$ telle que $f_{ij} \circ \pi_j = \pi_i$ chaque fois que $i \leq j$, universelle avec ces propriétés.

4.5.12 Limites d'ensembles ([Le14, 5.1.22]). La catégorie des ensembles possède toutes les limites indicées par des petites catégories. Précisément, on vérifie que la limite de $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ est le sous-ensemble du produit $\prod_{i \in I} X_i$ décrit ainsi :

$$\lim X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \text{ tel que } x_j = X_u(x_i) \text{ pour toute flèche } u : i \rightarrow j \right\}.$$

On note que si l'un des X_i est vide, alors la limite est vide. Cette description est valable également dans les catégories de modules et d'anneaux.



4.5.13 Définition alternative des limites et colimites. En lisant 4.5.12, la lectrice attentive aura peut-être fait un lien avec les définitions de limite et colimite dans une catégorie arbitraire, par l'intermédiaire du foncteur Hom . En effet, soient $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur et $M \in \mathcal{C}$ un objet. Une transformation naturelle $v : \Delta_M \rightarrow X$ est par définition la donnée d'une famille de morphismes $v_i : M \rightarrow X_i$ tels que $v_j = X_u(v_i)$ pour toute flèche $u : i \rightarrow j$. Ceci est exactement un élément de l'ensemble $\lim \text{Hom}(M, X_i)$ tel que nous venons de le décrire. On peut donc reformuler la définition 4.5.10 en disant que si elle existe, la limite $L := \lim X_i$ vérifie :

$$h_L(M) \stackrel{\text{déf. de } h_L}{\cong} \text{Hom}(M, \lim X_i) \stackrel{\text{déf. 4.5.10}}{\cong} \text{Hom}(\Delta_M, X) = \lim \text{Hom}(M, X_i).$$

Comme ces isomorphismes sont fonctoriels en M , par le lemme de Yoneda 4.3.3 ils déterminent L de manière unique, à isomorphisme unique près. Les colimites étant duales des limites, on trouve une description analogue pour le foncteur h'_C d'une colimite. En résumé, si l'on suppose donnée la définition de la limite dans la catégorie des ensembles donnée dans 4.5.12, les isomorphismes fonctoriels suivants fournissent une *définition alternative des limites et colimites* :

- (i) $\text{Hom}(\text{colim } X_i, D) = \lim \text{Hom}(X_i, D)$,
- (ii) $\text{Hom}(M, \lim X_i) = \lim \text{Hom}(M, X_i)$.

4.5.14 Exemples (Autres formes de limites, [Le14, § 5.1]). Les différentes formes I donnent naissance aux cas particuliers importants suivants de limites :

1. les *produits* notés $\prod X_i$,
2. les *produits fibrés* aussi appelées *pullbacks* et notés $X \times_Z Y$,
3. les *égalisateurs* $\text{eq}(f, g : X \rightrightarrows Y)$ d'une paire de flèches,
4. les *noyaux* $\ker(f) := \text{eq}(f, 0_{XY} : X \rightrightarrows Y)$, lorsque \mathcal{C} possède un objet 0 .

Soulignons le fait que le noyau de f n'est pas seulement un objet : c'est un morphisme $i : K \rightarrow X$ (tel que $f \circ i = 0_{XY}$, universellement avec cette propriété). Même remarque pour le conoyau.

4.5.15 Exercice. Les catégories Ens , Ens^* , Grp , Ab , Ann possèdent-elles des produits de deux objets, des produits fibrés, des égalisateurs ? Celles qui possèdent un objet zéro possèdent-elles des noyaux ?

Pour terminer cette section, nous fournissons un tableau (cf figure 15) qui indique des références possibles pour l'existence et la description des limites et colimites dans trois catégories fondamentales pour la suite : les ensembles, les anneaux et les modules. Nous complétons le tableau en indiquant quels sont les objets initiaux et terminaux dans ces catégories.

	Ens	Ann	Mod(A)
limites	[Le14, 5.1.22]	[Le14, 5.1.23]	[Le14, 5.1.23]
colimites	[Le14, 5.2.16]	[Ei95, Prop. A.6.7]	[Ei95, Prop. A.6.2]
objet initial	\emptyset	\mathbb{Z}	$\{0\}$
objet terminal	\star	$\{0\}$	$\{0\}$

FIGURE 15 – Limites, colimites, objets initiaux et terminaux dans quelques catégories

5 Faisceaux

5.1 Motivation et historique

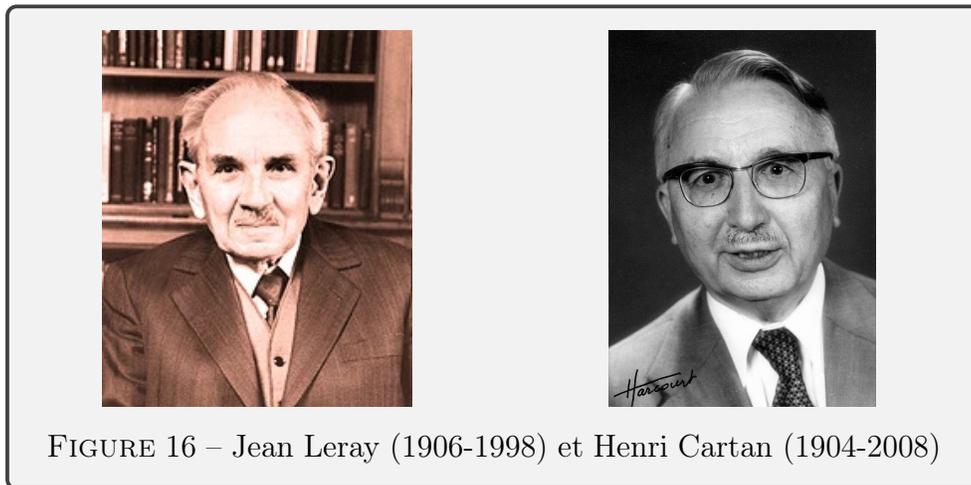


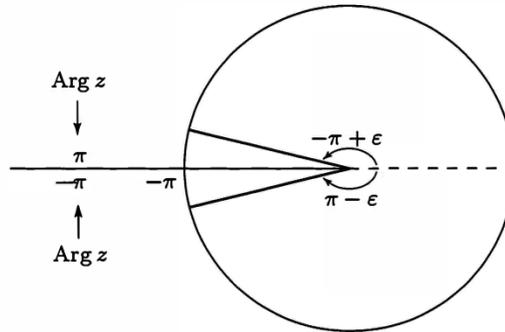
FIGURE 16 – Jean Leray (1906-1998) et Henri Cartan (1904-2008)

Pour partir d'un exemple à la fois élémentaire et familier, considérons la question de l'existence de logarithmes complexes définis sur le plan complexe $X = \mathbb{C}$. De telles fonctions sont des sections holomorphes de l'exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Pour étudier cette question, pour chaque ouvert $U \subset X$ on introduit l'anneau $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et le groupe $\mathcal{O}^\times(U)$ de ses éléments inversibles, les fonctions holomorphes $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Pour chaque ouvert connexe U , l'exponentielle s'insère dans une suite de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times(U) \longrightarrow 0.$$

Le point clé est que sur de petits disques U_i l'exponentielle est surjective (donc la suite ci-dessus est *exacte*, voir définition 10.2.5) alors que si $U = X$ elle ne l'est pas. En fait il est classique qu'il n'existe même pas de logarithme *continu* sur le cercle unité ; voir par exemple l'extrait du livre de É. Amar et É. Matheron [AM04] reproduit en figure 17. La théorie des faisceaux est bâtie pour comprendre et exploiter ce type de propriété de surjectivité affaiblie : locale mais non globale.

Lemme 3.2.7. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle unité \mathbb{T} .*



Preuve. Si g est une détermination du logarithme sur \mathbb{T} , alors $\exp(g(e^{i\theta})) = e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc $g(e^{i\theta}) = i\theta + 2i\pi k(\theta)$ pour un certain entier $k(\theta)$. Si g était continue, la fonction k serait continue sur \mathbb{R} , et serait donc constante par connexité de \mathbb{R} . On aurait ainsi $g(e^{i\theta}) \equiv i\theta + 2ik\pi$ pour un certain entier k , et on obtiendrait alors à la fois $g(1) = g(e^{i0}) = 2ik\pi$ et $g(1) = g(e^{2i\pi}) = 2i\pi + 2ik\pi$, d'où une contradiction.

FIGURE 17 – Non-existence du logarithme complexe sur le cercle unité selon [AM04]

Dans le contexte de ce cours, il est plus pertinent d'évoquer les exemples historiques qui ont servi de motivation à l'introduction de la notion de faisceau. Pour Leray, Cartan, Serre puis Grothendieck il s'agissait de formaliser les propriétés des sections holomorphes $s : U \rightarrow E$ de fibrés vectoriels complexes $E \rightarrow X$ sur des ouverts $U \subset X$ et étudier leur éventuelle extension en des sections globales. La page Wikipédia consacrée aux faisceaux en dit un peu plus à ce sujet, voir la figure 18.

La structure de fibré vectoriel implique que les sections sur un ouvert $U \subset X$ peuvent être d'une part additionnées, d'autre part multipliées par des fonctions holomorphes $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ des sections de $E \rightarrow X$ au-dessus de U est un module sur l'anneau $\mathcal{O}(U)$ des fonctions complexes sur U . Nous concentrerons notre intérêt sur les deux types de faisceaux suivants :

- les faisceaux de modules, dont le faisceau \mathcal{F} ci-dessus est un exemple typique, car c'est sur eux que porteront de nombreux résultats majeurs du cours ;
- les faisceaux d'ensembles, car la théorie est un peu plus simple à développer pour eux, ce qui leur donne un intérêt pédagogique certain.

Les faisceaux de modules reçoivent une loi externe de multiplication par les sections du faisceau

En **mathématiques**, un **faisceau** est un outil permettant de suivre systématiquement des données définies localement et rattachées aux **ouverts** d'un **espace topologique**. Les données peuvent être restreintes à des ouverts plus petits, et les données correspondantes à un ouvert sont équivalentes à l'ensemble des données compatibles correspondantes aux ouverts plus petits couvrant l'ouvert d'origine. Par exemple, de telles données peuvent consister en des **anneaux** de fonctions réelles continues ou lisses définies sur chaque ouvert.

En **géométrie**, aussi bien d'ailleurs en **géométrie algébrique** qu'en **géométrie différentielle**, la notion de faisceau est une généralisation de celle d'ensemble des sections d'un **fibré vectoriel**. Dans ce cadre, la base du fibré est une **variété algébrique** ou une **variété différentielle**.

Les faisceaux ont été introduits par **Jean Leray** en **topologie algébrique** lorsqu'il était en captivité durant la Seconde Guerre mondiale¹. Sous l'impulsion, notamment, d'**Henri Cartan**², de **Jean-Pierre Serre**³ et d'**Alexandre Grothendieck**^{4,5} (à qui on doit le terme *préfaisceau*), les faisceaux ont pris par la suite une importance considérable dans de nombreux domaines des mathématiques où l'on cherche à passer, pour un problème donné, d'une solution locale à une solution globale. Les obstructions à un tel passage s'étudient grâce à la **cohomologie des faisceaux**.

FIGURE 18 – Introduction de la page « Faisceau » sur Wikipedia
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Faisceau_\(mathématiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Faisceau_(mathématiques))
 (page consultée le 25 octobre 2024)

d'anneaux \mathcal{O} , si bien que des faisceaux d'anneaux apparaîtront aussi, mais leur rôle sera moins important et nous n'insisterons pas dessus.

Avant de passer aux premières définitions formelles de la théorie, nous rappelons pour usage ultérieur que les catégories d'ensembles, d'anneaux ou de modules admettent les limites et colimites indicées par une petite catégorie. En particulier, elles admettent des objets initiaux et terminaux : en fait, dans toute catégorie \mathcal{C} , il existe une unique famille d'objets indicée par l'ensemble vide, et son produit (resp. son coproduit) s'il existe est la même chose qu'un objet terminal (resp. un objet initial), voir [Le14, 5.1.9, 5.2.3]. Le tableau de la figure 15 résume la situation.

5.2 Préfaisceaux

Commençons par les préfaisceaux, qui forment un cadre général commode pour la théorie. Dans toute cette sous-section, on fixe un espace topologique X .

5.2.1 Définition.

- Un *préfaisceau d'ensembles* \mathcal{F} sur X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ pour chaque ouvert $U \subset X$, et d'une application appelée *restriction* $\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ pour chaque inclusion d'ouverts $U \subset V$, satisfaisant les propriétés suivantes :
 - (i) $\text{res}_{U,U} = \text{id}_U$ pour tout U ,
 - (ii) $\text{res}_{V,U} \circ \text{res}_{W,V} = \text{res}_{W,U}$ pour toute chaîne $U \subset V \subset W$.



FIGURE 19 – Jean-Pierre Serre (1926-) et Alexandre Grothendieck (1928-2014)

- Un *morphisme de préfaisceaux d'ensembles* $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est la donnée d'applications $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ pour tous les ouverts $U \subset X$, qui commutent aux applications de restriction des préfaisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} au sens où $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{G}} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{F}}$.

On note $\text{Ens}^{\wedge}(X)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur X .

5.2.2 Notation. Si $U \subset V \subset X$ et $s \in \mathcal{F}(V)$, on utilise le plus souvent la notation simplifiée :

$$s|_U := \text{res}_{V,U}(s).$$

Alors la relation $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{G}} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{F}}$ s'écrit $\varphi(s)|_U = \varphi(s|_U)$ pour tous U, V, s .

5.2.3 Remarque. Notons $\text{Ouv}(X)$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X , et les morphismes sont les inclusions $U \subset V$; c'est la catégorie associée à un ensemble ordonné, comme dans l'exemple 4.1.3.2. La définition 5.2.1 peut se reformuler en disant qu'un préfaisceau d'ensembles est simplement un foncteur $\mathcal{F} : \text{Ouv}(X)^{\circ} \rightarrow \text{Ens}$. Ainsi, en posant $\mathcal{C} := \text{Ouv}(X)$ on voit que la définition de préfaisceau donnée ici est compatible avec la définition catégorique 4.3.2.

Dans le cours, pour la plupart des préfaisceaux que nous utiliserons, les ensembles $\mathcal{F}(U)$ seront munis de structures supplémentaires de groupes abéliens, d'anneaux ou de modules sur un anneau. Ceci revient à considérer des foncteurs $\text{Ouv}(X)^{\circ} \rightarrow \text{Ab}$, ou $\text{Ouv}(X)^{\circ} \rightarrow \text{Ann}$, etc. Pour éviter de multiplier des énoncés similaires, nous allons développer la théorie dans le cadre des *groupes abéliens*. Les modifications nécessaires pour les préfaisceaux d'ensembles, d'anneaux ou de modules sont la plupart du temps immédiates mais nous donnerons quelques détails supplémentaires sur le cas des modules dans la sous-section 5.4.

5.2.4 Définition.

- Un *préfaisceau de groupes abéliens* (ou simplement *préfaisceau abélien*) sur X est un préfaisceau \mathcal{F} tel que chaque $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une structure de groupe abélien et chaque restriction $\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est un morphisme de groupes abéliens.
- Un *morphisme de préfaisceaux abéliens* est un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est un morphisme de groupes abéliens pour chaque U .

On note $\text{Ab}^\wedge(X)$ la catégorie des préfaisceaux abéliens sur X .

5.2.5 Exemples.

1. Soit E un groupe abélien. Le préfaisceau défini par $\mathcal{F}(U) = E$ pour tout U et $\text{res}_{V,U} = \text{id}_E$ pour tous $U \subset V$ est appelé *préfaisceau constant de valeur E* sur X et noté \underline{E} .
2. Le *préfaisceau des fonctions réelles* (ou complexes) sur X est défini par $\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}\}$ avec les restrictions évidentes. On définit aussi les préfaisceaux $\mathcal{C}^0(-, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^b(-, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^{0,b}(-, \mathbb{R})$ des fonctions *continues* et/ou *bornées* sur X .
3. Le préfaisceau sur $X = \mathbb{C}$ des fonctions complexes holomorphes qui admettent une racine carrée est défini par $\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe} \mid \exists g : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe}, f = g^2\}$. On définit de même le préfaisceau des fonctions holomorphes qui admettent un logarithme.
4. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Le préfaisceau des sections de f est le préfaisceau d'ensembles défini par $\mathcal{F}(U) = \{s : U \rightarrow Y \mid f(s(x)) = x \text{ pour tout } x \in U\}$.

5.2.6 Exercice (Préfaisceaux sur un point).

1. Décrivez la catégorie des préfaisceaux abéliens sur X lorsque $\text{card}(X) = 0$.
2. Décrivez la catégorie des préfaisceaux abéliens sur X lorsque $\text{card}(X) = 1$.

5.2.7 Exercice (Adjoints du foncteur de préfaisceau constant). Montrez que le foncteur de préfaisceau constant $\text{Ab} \rightarrow \text{Ab}^\wedge(X)$, $E \mapsto \underline{E}$ défini en 5.2.5 possède des adjoints des deux côtés et décrivez-les.

5.2.8 Exercice (Monomorphismes de préfaisceaux abéliens). Le lemme de Yoneda 4.3.3 est un énoncé valable dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles $\text{Ens}^\wedge(X)$. Nous allons l'adapter à la catégorie des préfaisceaux abéliens $\text{Ab}^\wedge(X)$ pour pouvoir décrire ses monomorphismes (le résultat sera d'ailleurs également valable pour les monomorphismes de préfaisceaux d'ensembles, par la même stratégie de démonstration). On note $U \subset X$ un ouvert.

1. Soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles. Décrivez concrètement le foncteur de points $h_U : \text{Ouv}(X)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ et la bijection $\text{Hom}(h_U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$ du lemme de Yoneda.
2. Soit \mathcal{F} un préfaisceau abélien. On note $\underline{\mathbb{Z}}_U$ le préfaisceau défini par $\underline{\mathbb{Z}}_U(V) = \mathbb{Z}$ si $V \subset U$, et $\{0\}$ sinon. Construisez un isomorphisme de groupes abéliens $\text{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$.
3. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux abéliens sur X . En utilisant la question précédente, montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un monomorphisme de préfaisceaux abéliens,
 - (b) $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est injectif pour tout ouvert U .

5.2.9 Exercice (Épimorphismes de préfaisceaux abéliens). Pour un bref rappel sur les sommes amalgamées, aussi appelées pushouts, on pourra consulter [Le14, 5.2.11, 5.2.12], [Mac78, III.3] ou [https://en.wikipedia.org/wiki/Pushout_\(category_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pushout_(category_theory)).

1. Soient $u : F \rightarrow G$, $v : F \rightarrow H$ deux applications d'ensembles. Rappelez la construction de la somme amalgamée $G \amalg_F H$ dans Ens . Adaptez cette construction pour montrer l'existence des sommes amalgamées $\mathcal{G} \amalg_{\mathcal{F}} \mathcal{H}$ dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur X .

2. Rappelez la construction du pushout $G \oplus_F H$ dans la catégorie des groupes abéliens. Adaptez cette construction pour montrer l'existence des sommes amalgamées $\mathcal{G} \oplus_{\mathcal{F}} \mathcal{H}$ dans la catégorie des préfaisceaux abéliens sur X .
3. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux abéliens sur X . En utilisant la question précédente, montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un épimorphisme de préfaisceaux,
 - (b) $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est surjectif pour tout ouvert U .

5.2.10 Exercice (Isomorphismes de préfaisceaux abéliens). Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux abéliens sur X . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un isomorphisme,
- (b) $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est bijectif pour tout ouvert U ,
- (c) φ est un monomorphisme et un épimorphisme.

Pour finir voici un peu de notation et de terminologie concernant les différentes manières de localiser des préfaisceaux et leurs sections au voisinage d'un point.

5.2.11 Définition. Soient U un ouvert de X , et x un point de U . Soit \mathcal{F} un préfaisceau abélien sur X . On appelle :

- *sections globales* les éléments de $\mathcal{F}(X)$, noté également $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ou $\Gamma(\mathcal{F})$.
- *sections locales sur U* les éléments de $\mathcal{F}(U)$, noté également $\Gamma(U, \mathcal{F})$.
- *germes en x* les éléments de l'ensemble $\mathcal{F}_x := \operatorname{colim}_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$, appelé *fibres* de \mathcal{F} en x .

On note $s \mapsto s|_U \mapsto s_x$ les images par les applications $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$.

Explicitement \mathcal{F}_x est le groupe des classes d'équivalence de paires (U, s) avec $x \in U$ ouvert et $s \in \mathcal{F}(U)$, pour la relation suivante : $(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2)$ si et seulement s'il existe $V \subset U_1 \cap U_2$ contenant x tel que $s_1|_V = s_2|_V$. Tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induit un morphisme sur les fibres $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$.

5.3 Faisceaux et faisceautisation

On poursuit avec un espace topologique X . Les faisceaux sont les préfaisceaux dont les sections, comme celles des fibrés vectoriels évoqués dans la sous-section 5.1, sont déterminées localement.

5.3.1 Définition.

- Un *faisceau abélien* sur X est un préfaisceau abélien \mathcal{F} tel que pour tout ouvert $U \subset X$, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U , pour toute collection de sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telle que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tous i, j , il existe une unique section $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i . On résume ceci en disant que *le diagramme suivant est exact* :

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{a} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightleftharpoons[b_2]{b_1} \prod_{i, j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

où $a(s) = (s|_{U_i})_{i \in I}$, $b_1((s_i)_{i \in I}) = (s_i|_{U_i \cap U_j})_{i, j \in I}$ et $b_2((s_i)_{i \in I}) = (s_j|_{U_i \cap U_j})_{i, j \in I}$.

- Un *morphisme de faisceaux abéliens* est un morphisme de préfaisceaux abéliens.

On note $\text{Ab}(X) \subset \text{Ab}^\wedge(X)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux abéliens sur X .

5.3.2 Remarques.

1. On définit de même les faisceaux d'ensembles (voir à ce sujet la remarque 5.2.3).
2. Notons \star l'objet terminal de Ens ou Ab . Il découle de la définition que si \mathcal{F} est un faisceau, alors $\mathcal{F}(\emptyset) = \star$. En effet, en appliquant la propriété de faisceau à l'ouvert $U = \emptyset$ et son unique recouvrement indicé par l'ensemble vide, on aura $\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) = \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \star$ donc $\mathcal{F}(\emptyset) = \text{eq}(\star \rightrightarrows \star) = \star$.
3. Le diagramme de la définition peut se réécrire comme une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{a} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{b_1 - b_2} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

(Pour la définition de suite exacte, nous renvoyons à A.0.4 et pour une explication de la pertinence de ce concept, à la discussion dans la sous-section 10.1.)

5.3.3 Exercice (Premiers exemples). Lesquels des préfaisceaux de 5.2.5 sont des faisceaux ?

5.3.4 Exercice (Faisceaux sur un point). Cet exercice fait suite à l'exercice 5.2.6.

1. Décrivez la catégorie des faisceaux abéliens sur X lorsque $\text{card}(X) = 0$.
2. Décrivez la catégorie des faisceaux abéliens sur X lorsque $\text{card}(X) = 1$.

Notre prochain objectif est de décrire les monomorphismes, épimorphismes et isomorphismes dans la catégorie $\text{Ab}(X)$. Pour cela, nous nous appuierons sur l'utilisation des germes ainsi que sur la construction fondamentale du *faisceau associé* à un préfaisceau.

5.3.5 Proposition. *L'inclusion $i : \text{Ab}(X) \hookrightarrow \text{Ab}^\wedge(X)$ possède un adjoint à gauche*

$$\text{Ab}^\wedge(X) \longrightarrow \text{Ab}(X), \quad \mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^+$$

appelé foncteur de faisceautisation ou de faisceau associé, c'est-à-dire que l'on a des bijections

$$\text{Hom}_{\text{Ab}^\wedge(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) = \text{Hom}_{\text{Ab}(X)}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})$$

fonctorielles en $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X)$ et $\mathcal{G} \in \text{Ab}(X)$.

Ici on a noté $i(\mathcal{G})$ pour souligner l'adjonction, mais dans la pratique on note \mathcal{G} . La proposition montre que l'inclusion $\text{Ab}(X) \hookrightarrow \text{Ab}^\wedge(X)$ décrit une sous-catégorie réflexive, comme dans tous les exemples de l'exercice 4.4.5.

Démonstration : Pour chaque ouvert U , notons $\mathcal{F}^+(U)$ l'ensemble des collections $(s(x)) \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ qui « proviennent localement d'une section » au sens où tout point $y \in U$ possède un voisinage ouvert $V \subset U$ sur lequel tous les éléments $s(x)$, $x \in V$, sont les germes d'une même section $t \in \mathcal{F}(V)$. Soit $\eta(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ l'application définie par $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$. On vérifie alors que :

1. \mathcal{F}^+ est un faisceau.

2. $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ est un morphisme de préfaisceaux et c'est un isomorphisme si \mathcal{F} est un faisceau.
3. tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induit un morphisme de faisceaux $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ tel que $\varphi^+ \circ \eta_{\mathcal{F}} = \eta_{\mathcal{G}} \circ \varphi$.

Si \mathcal{G} est un faisceau, on en déduit que $\varphi = \eta_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \varphi^+ \circ \eta_{\mathcal{F}}$ si bien que φ se factorise de manière unique à travers $\eta_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$. Ceci démontre que les applications

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Ab}^{\wedge}(X)}(\mathcal{F}, i(\mathcal{G})) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ab}(X)}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \\ \varphi &\longmapsto \eta_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \varphi^+ \\ \psi \circ \eta_{\mathcal{F}} &\longleftarrow \psi. \end{aligned}$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre. □

5.3.6 Exercice (L'application $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$). L'application η qui apparaît dans la démonstration de la proposition précédente est l'unité de l'adjonction. Établissez ses propriétés :

1. pour toute paire de sections $s, t \in \mathcal{F}(U)$, on a $\eta(s) = \eta(t)$ ssi s et t sont égales localement (c'est-à-dire que tout point $x \in U$ possède un voisinage $V \subset U$ tel que $s|_V = t|_V$);
2. toute section $s \in \mathcal{F}^+(U)$ est localement l'image d'une section de \mathcal{F} (c'est-à-dire que tout point $x \in U$ possède un voisinage $V \subset U$ tel que $s|_V = \eta(t)$ pour une certaine section $t \in \mathcal{F}(V)$).
3. l'application $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ induit des isomorphismes $\eta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ sur les fibres.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire les monos, épis et isos de faisceaux.

5.3.7 Exercice (Monos, épis, isos de faisceaux). Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux abéliens sur un espace topologique X . En utilisant 5.2.8, 5.2.9, 5.2.10 et le procédé de faisceautisation, démontrez dans chacune des trois questions suivantes que les conditions sont équivalentes.

1. (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un monomorphisme de faisceaux,
 (b) $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est injectif pour tout ouvert U ,
 (c) $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est injectif pour tout $x \in X$.
2. (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un épimorphisme de faisceaux,
 (b) φ est *localement surjectif*: pour tout ouvert U et toute section $t \in \mathcal{G}(U)$, tout point $x \in U$ possède un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que $\varphi(s) = t|_V$ pour une certaine section $s \in \mathcal{F}(V)$,
 (c) $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est surjectif pour tout $x \in X$.
3. (a) $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un isomorphisme de faisceaux,
 (b) $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est bijectif pour tout ouvert U ,
 (c) $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est bijectif pour tout $x \in X$,
 (d) φ est un monomorphisme et un épimorphisme.

Ainsi, un épimorphisme de préfaisceaux est un épimorphisme de faisceaux mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Les monos, épis, isos de faisceaux sont souvent appelés *injections*, *surjections* et *bijections de faisceaux*, en dépit de la petite imprécision que cela entraîne dans le cas des surjections. La terminologie *surjectif au sens des faisceaux* est également utilisée.

5.3.8 Exercice (Faisceau constant). Soit E un groupe abélien. On appelle *faisceau constant* le faisceau associé au préfaisceau constant de valeur E , noté encore \underline{E} en l'absence de confusion possible.

1. Démontrez que le faisceau constant $\mathcal{F} = \underline{E}$ peut être décrit en munissant E de la topologie discrète et en posant $\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow E \text{ continue}\} = \{f : U \rightarrow E \text{ localement constante}\}$.
2. Donnez un exemple dans lequel le préfaisceau constant n'est pas un faisceau.
3. Si X est irréductible, le préfaisceau constant est-il un faisceau ?

5.3.9 Exercice. Démontrez que les morphismes de faisceaux suivants sont surjectifs au sens des faisceaux, mais pas au sens des préfaisceaux.

1. Soit $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et \mathcal{O}_X^\times le faisceau des fonctions holomorphes complexes qui ne s'annulent pas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Soit $\varphi : \mathcal{O}_X^\times \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$ l'application $\varphi(f) = f^2$ (il s'agit d'un des exemples de 5.2.5).
2. Soit $X = \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la droite projective complexe. Soit \mathcal{F}_0 , resp. \mathcal{F}_∞ le sous-faisceau du faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes complexes qui s'annulent en 0 resp. en ∞ (c'est une condition vide sur les ouverts U qui ne contiennent pas 0 resp. ∞). Soit $\varphi : \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_\infty \rightarrow \mathcal{O}_X$ défini par $\varphi(f_0 + f_1) = f_0 + f_1$.

5.3.10 Exercice (Adjoints de Γ). Soit X un espace topologique.

1. Montrez que pour tout groupe abélien E il existe un unique préfaisceau i_E sur X tel que $i_E(X) = E$ et $i_E(U)$ est égal au module nul si $U \neq X$.
2. Montrez que $\Gamma : \text{Ab}^\wedge(X) \rightarrow \text{Ab}$ possède des adjoints des deux côtés. (*Indication : l'un des adjoints est $E \mapsto i_E$. Quel est l'autre ?*)
3. Montrez que $\Gamma : \text{Ab}(X) \rightarrow \text{Ab}$ possède un adjoint à gauche, mais en général pas à droite. (*Indication : montrez qu'un foncteur $\text{Ab}(X) \rightarrow \text{Ab}$ qui possède un adjoint à droite transforme un épimorphisme de faisceaux en surjection ; c'est un cas particulier de la proposition 10.5.2.*)

5.4 Opérations internes : limites, colimites, \otimes , $\mathcal{H}om$

Dans cette sous-section, nous introduisons des constructions internes aux catégories de faisceaux, basées sur les concepts catégoriques découverts dans la section 4. Jusqu'à présent, pour alléger l'exposition nous avons évité de parler de faisceaux de modules mais il est maintenant nécessaire de les introduire, avec certaines notions qui leur sont propres comme le produit tensoriel. Maintenant que le lecteur est familier avec les rudiments de la théorie, nous abordons directement les faisceaux sans passer par les préfaisceaux.

5.4.1 Définition. Soit X un espace topologique.

- Un *faisceau d'anneaux* \mathcal{A} est un faisceau d'ensembles $\mathcal{A}(U)$ munis de structures d'anneaux, tel que les restrictions $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$ sont des morphismes d'anneaux.
- Un *faisceau de \mathcal{A} -modules* est un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{M}(U)$ munis de structures de $\mathcal{A}(U)$ -modules, tel que les restrictions $\text{res}_{V,U}^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(V) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ sont des morphismes de $\mathcal{A}(V)$ -modules au sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) \\ \text{res}_{V,U}^{\mathcal{A}} \times \text{res}_{V,U}^{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{V,U}^{\mathcal{M}} \\ \mathcal{A}(U) \times \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{M}(U). \end{array}$$

Les morphismes de faisceaux d'anneaux et de \mathcal{A} -modules sont définis naturellement. On note $\text{Mod}(X, \mathcal{A})$ ou plus simplement $\text{Mod}(\mathcal{A})$ la catégorie des faisceaux de \mathcal{A} -modules sur X .

5.4.2 Remarque.

1. Tous les concepts et résultats présentés précédemment pour les faisceaux abéliens sont valables pour les faisceaux de modules, en apportant au besoin les modifications évidentes : la fibre \mathcal{M}_x d'un faisceau de \mathcal{A} -modules est un \mathcal{A}_x -module, le faisceau associé à un préfaisceau de \mathcal{A} -modules est un faisceau de \mathcal{A} -modules, etc.
2. Puisqu'un \mathbb{Z} -module n'est rien d'autre qu'un groupe abélien, en prenant pour \mathcal{A} le faisceau d'anneaux constant $\underline{\mathbb{Z}}$ on retrouve la définition de faisceau abélien, i.e. $\text{Mod}(\underline{\mathbb{Z}}) = \text{Ab}(X)$. De ce fait, les résultats de cette sous-section incluent le cas des faisceaux abéliens.
3. Comme en 5.2.3, on peut voir les préfaisceaux d'anneaux comme des foncteurs $\mathcal{O}_{Uv}(X)^\circ \rightarrow \mathcal{D}$ en prenant pour \mathcal{D} la catégorie des anneaux. On interprète de même les préfaisceaux de \mathcal{A} -modules en prenant pour \mathcal{D} la catégorie des paires (A, M) composées d'un anneau et un module sur cet anneau ; les morphismes $(A, M) \rightarrow (B, N)$ sont les paires (φ, u) composées d'un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$ et un morphisme de A -modules $u : M \rightarrow N_A$ (où N_A désigne le groupe abélien N muni de la structure A -linéaire définie par $a \cdot n := \varphi(a)n$, voir 4.4.11), c'est-à-dire un morphisme de groupes abéliens tel que $u(am) = \varphi(a)u(m)$ pour tous $a \in A, m \in M$.

Venons-en aux différentes opérations internes que nous voulons introduire. On commence par les limites et colimites de préfaisceaux.

5.4.3 Proposition. *La catégorie des faisceaux de \mathcal{A} -modules admet toutes les limites et colimites indicées par une petite catégorie (et la même chose est vraie pour les catégories de préfaisceaux). Les limites et colimites de préfaisceaux se calculent argument par argument (sur chaque ouvert) et les limites et colimites de faisceaux s'obtiennent en faisceautisant si nécessaire. Explicitement, considérons un foncteur $\mathcal{F} : I \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$ et utilisons la notation $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$.*

1. La limite de \mathcal{F} est le faisceau $U \mapsto \lim_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$.
2. La colimite de \mathcal{F} est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \text{colim}_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$.

En particulier, soit $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme dans $\text{Mod}(\mathcal{A})$.

3. Le noyau $\ker(f)$ est le faisceau $U \mapsto \ker(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$,
4. Le conoyau $\text{coker}(f)$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \text{coker}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$,
5. L'image $\text{im}(f)$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \text{im}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$.

Démonstration : D'abord signalons que les cas 3, 4 et 5 découlent de 1 et 2 puisque le noyau est la limite du diagramme $f, 0 : \mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{G}$ (voir 4.5.14), le conoyau est sa colimite (voir 4.5.5) et l'image $\text{im}(f) = \ker(\text{coker}(f))$ est un mélange de limite et colimite (voir aussi 10.2.4).

Pour 1 et 2 nous nous contentons d'une esquisse de démonstration. Pour tout ouvert $U \subset X$, les modules $L(U) = \lim \mathcal{F}_i(U)$ et $C^{\text{pre}}(U) = \text{colim} \mathcal{F}_i(U)$ existent d'après les résultats rappelés dans le tableau de la figure 15 page 37. Pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$, les restrictions $\mathcal{F}_i(V) \rightarrow \mathcal{F}_i(U)$ induisent des applications $L(V) \rightarrow L(U)$ et $C^{\text{pre}}(V) \rightarrow C^{\text{pre}}(U)$ qui font de L et C^{pre} des préfaisceaux. Il n'est pas difficile de vérifier que L est en fait un faisceau. On note par ailleurs $C = (C^{\text{pre}})^+$ le

faisceau associé. On vérifie que L et C satisfont les propriétés universelles qui en font la limite et la colimite du foncteur \mathcal{F} . \square

La notion de suite exacte (voir A.0.4) s'étend naturellement aux faisceaux abéliens.

5.4.4 Définition. On dit qu'une suite de morphismes de faisceaux de \mathcal{A} -modules sur X

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est *exacte* si $\text{im}(f_{i-1}) = \text{ker}(f_i)$ pour tout i .

Comme le noyau et l'image d'un morphisme de A -modules sont la même chose que le noyau et l'image du morphisme de groupes abéliens sous-jacents, une suite de morphismes de faisceaux de \mathcal{A} -modules est exacte dans $\text{Mod}(\mathcal{A})$ si et seulement si elle l'est dans $\text{Ab}(X)$.

5.4.5 Exemple (Suite exponentielle). Reprenons l'exemple qui nous a servi de motivation en 5.1. Soit l'espace $X = \mathbb{C}$. On note $\mathcal{O}_X(U)$, resp. $\mathcal{O}_X^\times(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes complexes $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, resp. $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$. On dispose d'une suite de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \underline{2i\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0.$$

On a vu que l'application $\text{exp} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$ n'est pas surjective au sens des préfaisceaux. En revanche, elle est surjective au sens des faisceaux car pour toute fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$ élément de $\mathcal{O}_X^\times(U)$ et tout $z \in U$, il existe un voisinage ouvert \mathbb{D} de $f(z)$ et une détermination du logarithme $\ell : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, de sorte que sur l'ouvert $V = f^{-1}(\mathbb{D})$, la fonction holomorphe $g : V \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \ell(f(z))$ vérifie $\text{exp} \circ g = f$. On obtient ainsi une *suite exacte de faisceaux* appelée la *suite exponentielle*.

5.4.6 Exercice. Considérons une suite de morphismes de faisceaux abéliens sur X :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Démontrez que cette suite est exacte si et seulement si la suite de groupes de germes

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1,x} \longrightarrow \mathcal{F}_{i,x} \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1,x} \longrightarrow \cdots$$

est exacte, pour tout $x \in X$.

Nous introduisons maintenant deux opérations internes qui sont véritablement spécifiques aux modules : le produit tensoriel et le module d'homomorphismes.

5.4.7 Définition. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux de \mathcal{A} -modules sur X .

- Le *produit tensoriel* de \mathcal{F} et \mathcal{G} est le faisceau de \mathcal{A} -modules associé au préfaisceau

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{G}(U).$$

- Le *faisceau Hom* de \mathcal{F} et \mathcal{G} est le faisceau de \mathcal{A} -modules

$$U \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Ces faisceaux sont notés $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ respectivement.

5.4.8 Remarques.

1. Pour un ouvert $U \subset X$ fixé, on prendra garde de ne pas confondre :
 - (i) $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$ qui est un faisceau,
 - (ii) $\text{Hom}_{\mathcal{A}|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$ qui est un ensemble de morphismes de faisceaux,
 - (iii) $\text{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ qui est un ensemble de morphismes de modules.

On passe de (i) à (ii) en prenant les sections sur U , puisque

$$\Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{A}|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)) = \text{Hom}_{\mathcal{A}|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U).$$

De plus (ii) et (iii) sont reliés par le morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)). \\ \varphi &\longmapsto \varphi(U) \end{aligned}$$

2. On notera que si $U \subset V$, une application $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ n'induit *pas* naturellement une application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, de sorte que la règle $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ ne définit pas un préfaisceau. Un moyen de se convaincre que la définition de $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ donnée est « la bonne » est de voir qu'elle donne lieu à l'adjonction $\otimes \dashv \mathcal{H}om$ semblable à l'adjonction classique de l'exercice 4.4.10 :

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

Le lecteur pourra s'en assurer en résolvant l'exercice 5.5.15.

3. Il y a une règle simple pour savoir si la faisceautisation est superflue : « un foncteur qui commute aux limites envoie les faisceaux sur des faisceaux ». La raison pour ceci est que la suite exacte de la propriété de faisceau fait intervenir des produits, d'une part, et un égalisateur d'autre part (le diagramme de la définition 5.3.1 réalise $\mathcal{F}(U)$ comme l'égalisateur des flèches b_1 et b_2). Les foncteurs en question sont principalement ceux qui possèdent un adjoint à gauche ; c'est le cas de lim , en particulier de \ker , de $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -)$ pour tout préfaisceau \mathcal{F} (voir la remarque précédente ; noter aussi que $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}^+, -)$), et de l'image directe f_* (voir la sous-section suivante). En revanche, pour les autres foncteurs il convient de faisceautiser ; c'est le cas de colim , en particulier de coker et im , de $\mathcal{H}om(-, \mathcal{F})$ pour tout préfaisceau ou faisceau \mathcal{F} , du produit tensoriel $(- \otimes \mathcal{F})$ et de l'image inverse f^{-1} (voir la sous-section suivante).

5.5 Images directes et inverses

Étudions enfin la functorialité en X des catégories de faisceaux abéliens $\text{Ab}(X)$ et de \mathcal{A} -modules $\text{Mod}(\mathcal{A})$, c'est-à-dire leur comportement par rapport aux applications continues $f : X \rightarrow Y$. Les inclusions d'ouverts $U \hookrightarrow X$ ou de points $\{x\} \hookrightarrow X$ sont déjà apparues implicitement dans les sous-sections précédentes, si bien que les constructions faites ici vont nous permettre de revisiter certaines notions vues auparavant.

5.5.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

- L'*image directe* d'un faisceau abélien \mathcal{F} sur X est le faisceau sur Y

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}V).$$

- L'*image inverse* d'un faisceau abélien \mathcal{G} sur Y est le faisceau sur X associé au préfaisceau

$$U \mapsto \operatorname{colim}_{V \supset fU} \mathcal{G}(V).$$

Ces faisceaux sont notés $f_*\mathcal{F}$ et $f^{-1}\mathcal{G}$ respectivement. On obtient ainsi des foncteurs

$$f_* : \operatorname{Ab}(X) \rightarrow \operatorname{Ab}(Y) \quad \text{et} \quad f^{-1} : \operatorname{Ab}(Y) \rightarrow \operatorname{Ab}(X).$$

5.5.2 Remarque. L'intuition derrière la colimite qui définit $f^{-1}\mathcal{G}$, indiquée par l'ensemble des ouverts V contenant fU ordonné par inclusion, est que la partie fU est approchée par tous les ouverts V qui la contiennent. Lorsque fU est un ouvert, on a simplement $\operatorname{colim}_{V \supset fU} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}(fU)$.

5.5.3 Exercice. Soit X un espace topologique irréductible, par exemple $X = \operatorname{Spec}(A)$ avec A intègre. On rappelle que dans ce cas, tous les ouverts non vides de X sont denses, voir 3.2.9. On note $\mathcal{G} = \underline{\mathbb{Z}}$ le faisceau constant sur X de valeur \mathbb{Z} . Est-il différent du préfaisceau constant? Supposons que X contient deux points fermés $x_1 \neq x_2$ et notons $f : \{x_1, x_2\} \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrez que le préfaisceau $U \mapsto \operatorname{colim}_{V \supset fU} \mathcal{G}(V)$ n'est pas un faisceau.

5.5.4 Exemple (restriction à un ouvert). Soit $i : U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert. Le faisceau $i^{-1}\mathcal{F}$ est noté $\mathcal{F}|_U$ et appelé la *restriction de \mathcal{F} à U* . On a $(i^{-1}\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(V)$ pour tout $V \subset U$.

Dans l'exercice 4.4.8, l'équivalence ensembliste $f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$ entre images et préimages de parties a été interprétée comme une adjonction; voici comment cette adjonction s'étend aux faisceaux.

5.5.5 Proposition (Adjonction (f^{-1}, f_*) pour les faisceaux abéliens).

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. On a une bijection fonctorielle en $\mathcal{F} \in \operatorname{Ab}(X)$ et $\mathcal{G} \in \operatorname{Ab}(Y)$:

$$\operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Démonstration : Notons $(f_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G})(U) = \operatorname{colim}_{V \supset fU} \mathcal{G}(V)$ de sorte que $f_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G}$ est le *préfaisceau image inverse* qui apparaît implicitement dans la définition 5.5.1 et $f^{-1}\mathcal{G} = (f_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G})^+$. Un morphisme de préfaisceaux $a : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ équivaut à la donnée suivante :

- $\forall V \in \operatorname{Ouv}(Y)$, une application $a_V : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}V)$.

Les a_V doivent de plus être compatibles aux restrictions $\operatorname{res}_{V',V}$ mais pour alléger, ici et dans la suite de la démonstration, nous n'écrivons pas cette condition de compatibilité. Ceci équivaut à la donnée suivante :

- $\forall V \in \operatorname{Ouv}(Y), \forall U \in \operatorname{Ouv}(X)$ tel que $U \subset f^{-1}V$, une application $b_{U,V} : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$.

(Plus en détail, à une famille $\{a_V\}$ on associe la famille $\{b_{U,V}\}$ définie par $b_{U,V} = \operatorname{res}_{f^{-1}V,U} \circ a_V$ et inversement à $\{b_{U,V}\}$ on associe la famille $\{a_V\}$ définie par $a_V = b_{f^{-1}V,V}$.) Comme $U \subset f^{-1}V \iff V \supset fU$, ceci équivaut à la donnée suivante :

- $\forall U \in \mathcal{O}uv(X), \forall V \in \mathcal{O}uv(Y)$ tel que $V \supset fU$, une application $b_{U,V} : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$.

Pour U fixé, par propriété de la colimite la collection compatible d'applications $b_{U,V} : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ indexée par les $V \supset fU$ équivaut à la donnée d'une unique application $c_U : \text{colim}_{V \supset fU} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. Les applications c_U forment un morphisme $c : f_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$. En conclusion, nous avons une bijection

$$\text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \simeq \text{Hom}(f_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

où la dernière bijection provient de la propriété universelle de la faisceautisation. La functorialité de ces constructions en \mathcal{F} et \mathcal{G} ne présente pas de difficulté. \square

5.5.6 Exercice (Unité et coïunité d'adjonction). Décrivez l'unité $\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$ et la coïunité $\epsilon_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ de l'adjonction précédente.

5.5.7 Exercice (Fibres des images directes et inverses). Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $x \in X$ un point.

- (1) Soit \mathcal{G} un préfaisceau d'ensembles sur Y . Construisez une bijection $(f^{-1}\mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{f(x)}$.
- (2) Soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur X . Construisez une application naturelle $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \rightarrow \mathcal{F}_x$ et montrez qu'en général elle n'est ni injective ni surjective.

5.5.8 Exercice (Images directes et inverses des faisceaux constants). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout groupe abélien E , on note \underline{E}_X le préfaisceau constant sur X .

1. A-t-on $f_*\underline{E}_X = \underline{E}_Y$? et $f_*\underline{E}_X^+ = \underline{E}_Y^+$?
2. A-t-on $f^{-1}\underline{E}_Y = \underline{E}_X$? et $f^{-1}\underline{E}_Y^+ = \underline{E}_X^+$?

Voici maintenant la catégorie d'espaces naturelle pour parler de faisceaux de modules.

5.5.9 Définition.

- Un *espace annelé* est une paire (X, \mathcal{A}) composée d'un espace topologique X et un faisceau d'anneaux \mathcal{A} vivant dessus.
- Un *morphisme d'espaces annelés* $(f, \varphi) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est une paire composée d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow f_*\mathcal{A}$.

Par adjonction, dans un morphisme (f, φ) la donnée de $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow f_*\mathcal{A}$ est équivalente à celle d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^{-1}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Nous renvoyons à l'exercice 5.5.12 pour une discussion du bien-fondé de la définition des morphismes d'espaces annelés.

5.5.10 Définition. Soit $(f, \varphi) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ un morphisme d'espaces annelés.

- L'*image directe* d'un faisceau de \mathcal{A} -modules \mathcal{F} sur X est le faisceau $f_*\mathcal{F}$, qui est naturellement un $f_*\mathcal{A}$ -module et donc muni via $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow f_*\mathcal{A}$ d'une structure de \mathcal{B} -module.
- L'*image inverse* d'un faisceau de \mathcal{B} -modules \mathcal{G} sur Y est le faisceau produit tensoriel $f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}} \mathcal{A}$. C'est un faisceau de \mathcal{A} -modules.

On obtient ainsi des foncteurs

$$f_* : \text{Mod}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(Y, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad f^* : \text{Mod}(Y, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Mod}(X, \mathcal{A}).$$

5.5.11 Proposition (Adjonction (f^*, f_*) pour les faisceaux de modules).

Soit $(f, \varphi) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ un morphisme d'espaces annelés. On a une bijection fonctorielle en les faisceaux $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X, \mathcal{A})$ et $\mathcal{G} \in \text{Mod}(Y, \mathcal{B})$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Démonstration : Notons \otimes^{pre} le préfaisceau produit tensoriel qui apparaît dans la définition 5.4.7 (c'est-à-dire $(\mathcal{F}_1 \otimes^{\text{pre}} \mathcal{F}_2)(U) = \mathcal{F}_1(U) \otimes \mathcal{F}_2(U)$). Comme \mathcal{F} est un faisceau, par propriété de la faisceautisation on a :

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}}^{\text{pre}} \mathcal{A}, \mathcal{F}).$$

Maintenant rappelons l'adjonction de modules de l'exercice 4.4.11 :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Mod}(B)}(M \otimes_A B, N) &= \text{Hom}_{\text{Mod}(A)}(M, N_A) \\ (f : M \otimes_A B \rightarrow N) &\longleftrightarrow (g : M \rightarrow N_A) \end{aligned}$$

définie par $g(m) := f(m \otimes 1)$ dans un sens, et $f(m \otimes b) := bg(m)$ dans l'autre. Les mêmes constructions s'adaptent immédiatement aux préfaisceaux pour donner un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}}^{\text{pre}} \mathcal{A}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{B}}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

(on note encore \mathcal{F} le $f^{-1}\mathcal{B}$ -module induit par le \mathcal{A} -module \mathcal{F}). Enfin, il est facile de vérifier que l'adjonction de faisceaux abéliens vue en 5.5.11

$$\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

fait correspondre les structures de $f^{-1}\mathcal{B}$ -modules dans le membre de gauche avec les structures de \mathcal{A} -modules dans le membre de droite. Il en résulte que $\text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{B}}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ et nous avons terminé. \square

5.5.12 Exercice (Catégories de paires). On construit quatre catégories dont les objets sont les paires (X, \mathcal{F}) composées d'un espace topologique et un faisceau d'ensembles dessus. Les morphismes entre (X, \mathcal{F}) et (Y, \mathcal{G}) sont les paires (f, φ) où $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et φ est un certain morphisme de faisceaux. Les quatre catégories diffèrent par le morphisme φ .

(1) Dans C_1 , on prend pour $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_2 , on prend pour $\varphi : f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Justifiez qu'on obtient bien des catégories, en décrivant la composition naturelle des morphismes dans chacune. Montrez que C_1 et C_2 ne sont pas équivalentes (*suggestion : regardez les ensembles $\text{Hom}_{C_i}((X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}))$ lorsque $X = \emptyset$*).

(2) Dans C_3 , on prend pour $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur X . Dans C_4 , on prend pour $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux sur Y . Décrivez la composition naturelle des morphismes dans ces catégories. Montrez que C_3 et C_4 sont isomorphes.

Lorsque \mathcal{F}, \mathcal{G} représentent des faisceaux de fonctions (de n'importe quelle sorte) sur X, Y , la functorialité naturelle est *contravariante*, puisque $f : X \rightarrow Y$ fait correspondre à une fonction u sur Y la fonction $u \circ f$ sur X . C'est donc la situation (2).

5.5.13 Exercice (Adjoint à droite du foncteur fibre : faisceau gratte-ciel). Soient X un espace topologique et \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur X . Soient $x \in X$ un point et $i : \{x\} \hookrightarrow X$ l'inclusion. On note $(-)_x : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ le foncteur de fibre en x :

$$(-)_x : \text{Mod}(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{A}_x).$$

1. À l'aide du foncteur de sections globales, on identifie les faisceaux sur $\{x\}$ à des \mathcal{A}_x -modules. Démontrez qu'on a un isomorphisme $i^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_x$.
2. Déduisez-en que $(-)_x$ possède un adjoint à droite.
3. Pour tout \mathcal{A}_x -module E , on définit un préfaisceau E_x par $E_x(U) = E$ si $U \ni x$ et \star sinon, avec les applications de restriction évidentes. On appelle E_x le *faisceau gratte-ciel* de fibre E en x . Démontrez que le foncteur de gratte-ciel $E \mapsto E_x$ est l'adjoint à droite du foncteur $(-)_x$.

5.5.14 Exercice (Extension par zéro et adjonction $(j_!, j^{-1})$). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Soient \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur X et \mathcal{G} un préfaisceau d'ensembles sur Y . Pour tout ouvert $V \subset Y$, on pose :

$$(f_! \mathcal{F})(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \{(a, s); a : V \rightarrow X \text{ une section de } f, \text{ et } s \in \Gamma(V, a^{-1} \mathcal{F})\}.$$

1. Montrez que $f_! \mathcal{F}$ est un préfaisceau sur Y puis construisez une application bifonctorielle :

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, f^{-1} \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Hom}(f_! \mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

2. Soit $j : X \rightarrow Y$ une immersion ouverte (i.e. une application continue ouverte injective); elle identifie donc X à un ouvert de Y . On dit alors que $j_! \mathcal{F}$ est l'*extension par zéro* de \mathcal{F} . Démontrez que $(j_! \mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(V)$ si $V \subset j(X)$, et \emptyset sinon. Démontrez que l'application de la question précédente est une bijection $\text{Hom}(\mathcal{F}, j^{-1} \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(j_! \mathcal{F}, \mathcal{G})$.
3. Montrez que l'application de la question 1 n'est ni injective ni surjective en général. (*Indication : considérez les cas où X est un point, puis Y est un point.*)

5.5.15 Exercice (Sur le préfaisceau $\mathcal{H}om$). Soient \mathcal{A} un préfaisceau d'anneaux sur un espace topologique X et $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ des préfaisceaux de \mathcal{A} -modules. On suppose que le foncteur $(- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G})$ possède un adjoint à droite que l'on note $T_{\mathcal{G}}$, de sorte que l'on a, functoriellement en \mathcal{F} et \mathcal{H} :

$$(\star) \quad \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, T_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})).$$

Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert de X . On note $j_! \mathcal{A}_U$ le préfaisceau de \mathcal{A} -modules défini par $V \mapsto \mathcal{A}(V)$ si $V \subset U$, et \emptyset sinon. (La notation $j_!$ est celle introduite dans l'exercice 5.5.14. Le faisceau $j_! \mathcal{A}_U$ a déjà été vu dans l'exercice 5.2.8 où il était noté $\mathbf{1}'_U$.)

1. Pour tout préfaisceau de \mathcal{A} -modules \mathcal{M} , construisez :
 - (a) un isomorphisme de $\mathcal{A}(U)$ -modules $\text{Hom}(j_! \mathcal{A}_U, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(U)$ (voir exercice 5.2.8),
 - (b) un isomorphisme de préfaisceaux $\mathcal{M} \otimes j_! \mathcal{A}_U \simeq j_! \mathcal{M}|_U$.
2. En prenant $\mathcal{F} = j_! \mathcal{A}_U$ dans (\star) , montrez que $T_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})(U) = \text{Hom}_{\mathcal{A}|_U}(\mathcal{G}|_U, \mathcal{H}|_U)$. (*Indication : utilisez l'adjonction de l'exercice 5.5.14.*)
3. Démontrez qu'existe une adjonction $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$.

6 Schémas

6.1 Faisceau des fonctions sur $\text{Spec } A$

Dans la sous-section 3.3, nous avons défini l'ensemble des fonctions globales sur $X = \text{Spec}(A)$. Nous allons maintenant définir les fonctions globales sur chaque ouvert, de manière à obtenir un faisceau noté \mathcal{O}_X . Comme les ouverts arbitraires de X sont assez compliqués, il est agréable de travailler seulement avec les éléments de la base \mathcal{B} des ouverts principaux $D(f)$ car ceux-ci sont affines, c'est-à-dire des spectres d'anneaux (voir exercice 3.1.7).

6.1.1 Faisceaux sur une base d'ouverts. Rappelons qu'une base d'ouverts d'un espace topologique est une famille d'ouverts \mathcal{B} telle que tout ouvert de X est réunion d'ouverts de \mathcal{B} . Les valeurs d'un faisceau sur les seuls ouverts d'une base \mathcal{B} le déterminent entièrement. La notion de \mathcal{B} -faisceau formalise ce fait ; il s'agit simplement de la notion habituelle, dans laquelle on s'astreint à ne mentionner que les ouverts éléments de \mathcal{B} :

6.1.2 Définition. Soit X un espace topologique et \mathcal{B} une base d'ouverts. Un \mathcal{B} -faisceau \mathcal{F}_0 est la donnée d'une collection d'ensembles $\mathcal{F}_0(U)$ pour tous les ouverts U de \mathcal{B} et d'une collection d'applications de restriction $\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}_0(V) \rightarrow \mathcal{F}_0(U)$ pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$ de \mathcal{B} , satisfaisant :

- $\text{res}_{U,U} = \text{id}_U$ pour tout U , et $\text{res}_{V,U} \circ \text{res}_{W,V} = \text{res}_{W,U}$ pour toute chaîne $U \subset V \subset W$,
- pour tout $V \in \mathcal{B}$, pour tout recouvrement ouvert de V par des éléments $V_i \in \mathcal{B}$, et toute collection de sections $s_i \in \mathcal{F}_0(V_i)$ qui coïncident sur tous les ouverts $W \subset V_i \cap V_j$ appartenant à \mathcal{B} , il existe une unique section $s \in \mathcal{F}_0(V)$ telle que $s|_{V_i} = s_i$ pour tout i .

On peut bien sûr parler aussi de \mathcal{B} -faisceaux d'anneaux, de modules, etc.

6.1.3 Proposition. Soit \mathcal{F}_0 un \mathcal{B} -faisceau. Pour un ouvert quelconque $U \subset X$, posons

$$\mathcal{F}(U) = \lim_{V \subset U; V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_0(V).$$

Alors \mathcal{F} est l'unique faisceau tel que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$ si $U \in \mathcal{B}$.

On rappelle que la limite projective dans le membre de droite est l'ensemble des collections $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$, $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)|_W$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans \mathcal{B} . Pour des rappels sur les limites projectives (ou limites inverses), voir [Ei95], Appendix 6 ou [Mat89], Appendix A.

Démonstration : Si $U \in \mathcal{B}$, le système projectif des $V \subset U$, $V \in \mathcal{B}$ possède un élément maximal (ou initial) de sorte que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_0(U)$. S'il existe un faisceau \mathcal{F} avec cette propriété, alors chacune de ses sections $s \in \mathcal{F}(U)$ est déterminée par la collection de ses restrictions $s|_V$, $V \in \mathcal{B}$, $V \subset U$, astreintes à coïncider sur les ouverts $V \cap V'$, c'est-à-dire sur tous les ouverts $W \subset V \cap V'$ de \mathcal{B} (noter que $V \cap V'$, s'il n'est pas dans \mathcal{B} , est en tout cas recouvert par des éléments de \mathcal{B}). Ainsi s peut être identifiée à l'ensemble des familles $(s_V)_{V \in \mathcal{B}}$, $s_V \in \mathcal{F}_0(V)$, telles que $s_W = (s_V)|_W$ pour toute inclusion $W \subset V$ dans \mathcal{B} . C'est exactement l'expression donnée en termes de limite projective dans l'énoncé. Il reste à montrer que cette expression définit bien un faisceau ; ceci est laissé au lecteur. \square

6.1.4 Exercice. Décrivez les morphismes de restriction du préfaisceau \mathcal{F} défini dans la proposition. Vérifiez que \mathcal{F} est bien un faisceau. Montrez que si $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$ sont deux \mathcal{B} -faisceaux, alors toute collection d'applications $\varphi(V) : \mathcal{F}_0(V) \rightarrow \mathcal{G}_0(V)$ pour $V \in \mathcal{B}$, commutant aux restrictions d'ouverts de \mathcal{B} , s'étend en un unique morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

On définit maintenant le *faisceau des fonctions régulières* noté \mathcal{O}_X sur l'espace $X = \text{Spec}(A)$.

6.1.5 Proposition. *Il existe un unique faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X sur $X = \text{Spec } A$ tel que :*

1. $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ pour tout $f \in A$,
2. $\text{res}_{D(g), D(f)} : A_g \rightarrow A_f$ est égal au morphisme d'anneaux naturel (voir exercice 3.1.8), pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$.

Démonstration : D'après 6.1.3, il suffit de définir un \mathcal{B} -faisceau, pour la base \mathcal{B} composée des ouverts principaux $D(f)$, $f \in A$. Cette base possède la propriété agréable d'être stable par intersections finies puisque $D(f_1) \cap D(f_2) = D(f_1 f_2)$, ce qui simplifie la condition de coïncidence de la définition 6.1.2.

D'abord il convient de noter que lorsque $D(f) = D(g)$, les anneaux A_f et A_g sont canoniquement isomorphes (voir exercice 3.1.8). Par conséquent, si $U = D(f)$, la définition $\mathcal{O}_X(U) := A_f$ ne dépend pas du choix de f . Maintenant, fixons $f \in A$ et montrons la propriété de \mathcal{B} -faisceau pour tous les recouvrements ouverts de $D(f)$. Celui-ci étant un spectre, et ses ouverts principaux étant des ouverts principaux dans X , quitte à remplacer A par A_f on se ramène au cas $f = 1$. Il reste à montrer que pour tout recouvrement ouvert de la forme $X = \cup_i D(f_i)$, toute famille d'éléments $s_i \in A_{f_i}$ tels que s_i et s_j deviennent égaux dans $A_{f_i f_j}$ se recolle en un unique $s \in A$.

D'abord une remarque. Pour tout entier $\alpha \geq 1$ on a $D(f) = D(f^\alpha)$, donc $X = \cup_i D(f_i^\alpha)$. Comme X est quasi-compact (voir 3.2.3), il existe un sous-recouvrement fini $D(f_1^\alpha), \dots, D(f_n^\alpha)$. Ceci entraîne qu'il existe a_1, \dots, a_n dans A tels que $1 = a_1 f_1^\alpha + \dots + a_n f_n^\alpha$, par le même argument que dans la démonstration de 3.2.3. (Les a_i dépendent de α , bien sûr.) Dans la suite de la preuve, nous utiliserons ce type d'écriture, appelée une *partition de l'unité*.

Montrons l'unicité. Si s et t sont égaux dans chaque A_{f_i} , alors pour chaque i il existe $\alpha_i \geq 1$ tel que $f_i^{\alpha_i}(s - t) = 0$. Si $\alpha = \max(\alpha_i)$, on trouve $f_i^\alpha(s - t) = 0$ pour tout i . En utilisant une partition de l'unité, on en déduit que $s - t = 0$.

Montrons maintenant l'existence. Comme s_i et s_j ont mêmes images dans $A_{f_i f_j}$, il existe des entiers $\alpha, \beta \geq 1$ tels que, pour tous i, j on a $s_i = d_i / f_i^\alpha$ et $(f_i f_j)^\beta (f_j^\alpha d_i - f_i^\alpha d_j) = 0$; le fait que α et β peuvent être choisis indépendants de i, j provient de la quasi-compactité. Fixons une partition de l'unité $1 = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta}$. Posons $s = \sum_j a_j f_j^\beta d_j$. On a :

$$f_i^{\alpha+\beta} s = \sum_j a_j f_j^\beta f_i^{\alpha+\beta} d_j = \sum_j a_j f_j^{\alpha+\beta} f_i^\beta d_i = f_i^\beta d_i.$$

Ceci montre que dans A_{f_i} on a $s = d_i / f_i^\alpha = s_i$, pour tout i . □

6.1.6 Fibres de \mathcal{O}_X . Si $x = [p]$ est un point de $X = \text{Spec}(A)$ dans 3.3.8 on a appelé *anneau local de x* l'anneau localisé $\mathcal{O}_{X,x} := A_p = S^{-1}A$ avec $S = A \setminus p$. Vérifions que ceci est bien la fibre au point x du faisceau \mathcal{O}_X , de sorte que la notation utilisée est cohérente. La fibre de ce faisceau est la

limite inductive $\text{colim } \mathcal{O}_X(U)$ prise sur tous les ouverts U contenant x . Comme les ouverts principaux forment une base, il suffit de considérer ceux-ci dans la limite inductive. Ainsi la fibre est égale à la limite inductive des anneaux A_f pour $f \notin p$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de la forme a/f^n avec $a \in A$ et $f \notin p$. On voit que cet ensemble est isomorphe au localisé de A par rapport à la partie $S = A \setminus p$, c'est bien le localisé A_p .

6.1.7 Proposition. *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Soient $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ et $u = \text{Spec}(\varphi) : Y \rightarrow X$ l'application continue associée (voir 3.1.4). Il existe un unique morphisme de faisceaux d'anneaux $u^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow u_*\mathcal{O}_Y$ tel que $u^\sharp(D(f)) : \mathcal{O}_X(D(f)) \rightarrow (u_*\mathcal{O}_Y)(D(f))$ est égal au morphisme $\varphi_f : A_f \rightarrow B_f$ induit par φ .*

On note que pour tout $f \in A$, on a

$$u^{-1}(D(f)) = \{y = [q] \in Y; f \notin q \cap A\} = \{y = [q] \in Y; f \notin q\} = D(f \cdot 1_B).$$

de sorte que $u_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(D(f \cdot 1_B)) = B_f$ et la définition de φ_f donnée ci-dessus est légitime.

Démonstration : Vérifions que les $u^\sharp(D(f)) = \varphi_f$ définissent bien un morphisme de \mathcal{B} -faisceaux, c'est-à-dire qu'ils sont compatibles aux restrictions le long d'inclusions d'ouverts affines principaux $D(f) \subset D(g)$. Il s'agit de montrer qu'on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_g & \xrightarrow{\varphi_g} & B_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \xrightarrow{\varphi_f} & B_f. \end{array}$$

Or ceci découle des propriétés établies dans l'exercice 3.1.8, Dès lors, l'existence et l'unicité de u^\sharp découlent de 6.1.3. \square

6.2 Schémas

Un schéma général sera défini comme une paire (X, \mathcal{O}_X) composée d'un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, localement isomorphe à un schéma affine. Voici la catégorie où l'expression « localement isomorphe » prendra son sens :

6.2.1 Définition. On appelle :

- *espace localement annelé* ou *espace annelé en anneaux locaux* un couple (X, \mathcal{O}_X) composé d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux,
- *morphisme d'espaces localement annelés* un couple (f, f^\sharp) composé d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tel que pour tout $x \in X$ d'image $y = f(x)$, le morphisme sur les germes est un morphisme d'anneaux locaux :

$$\mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{f_y^\sharp} (f_*\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x},$$

- composé des morphismes $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ le morphisme $(h, h^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ où $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ et $h^\sharp = g_* f^\sharp \circ g^\sharp :$

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\sharp} g_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_* f^\sharp} g_* f_* \mathcal{O}_X = h_* \mathcal{O}_X.$$

On note souvent X au lieu de (X, \mathcal{O}_X) et $f : X \rightarrow Y$ au lieu de (f, f^\sharp) . Le morphisme de faisceaux $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ est appelé le *comorphisme* de f .

6.2.2 Remarques.

1. Rappelons que si (A, m) et (B, n) sont deux anneaux locaux, un *morphisme d'anneaux locaux* est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$ tel que $\varphi(m) \subset n$. Il est équivalent de demander que $m \subset \varphi^{-1}(n)$, ou encore que $m = \varphi^{-1}(n)$ (pourquoi?).
2. Le lecteur pourra éclaircir ses idées sur la flèche $(f_* \mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ en regardant l'exercice 5.5.7.
3. On prendra garde au fait que, contrairement à ce que la terminologie et la notation peuvent laisser croire, le comorphisme f^\sharp n'est pas déterminé par f .
4. Si U est un ouvert de X et $i : U \rightarrow X$ est l'inclusion, l'espace U muni du faisceau $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U = i^{-1} \mathcal{O}_X$ (voir 5.5.4) est un espace localement annelé. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme, $V \subset Y$ un ouvert, $U \subset X$ sa préimage, on a de même un morphisme d'espaces localement annelés induit $f|_U : U \rightarrow V$.

6.2.3 Exercice. Donnez un exemple d'espace annelé (un couple (X, \mathcal{O}_X) composé d'un espace topologique et un faisceau d'anneaux) tel que les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ ne sont pas des anneaux locaux.

On a vu dans 6.1.5 et 6.1.6 que le spectre d'un anneau est un espace localement annelé, ce qui donne sens à ce qui suit.

6.2.4 Définition. Soit $X = (X, \mathcal{O}_X)$ un espace localement annelé. On dit que X est :

- un *schéma affine* s'il est isomorphe à $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ pour un certain anneau A ,
- un *schéma* s'il possède un recouvrement ouvert $X = \cup U_i$ tel que les espaces localement annelés (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) (voir remarque 6.2.2.4) sont des schémas affines.

Un *morphisme de schémas* est un morphisme d'espaces localement annelés. Le faisceau \mathcal{O}_X est appelé *faisceau de fonctions (régulières)* ou *faisceau structural* du schéma X . L'espace topologique sous-jacent au schéma X est parfois noté $|X|$ et appelé le *support* de X .

Une conséquence immédiate et fondamentale de cette définition est qu'un espace annelé recouvert par des ouverts qui sont des schémas est un schéma. On dit parfois que *la notion de schéma est locale*.

6.2.5 Exercice (Schémas affines). Notons Aff la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés composée des schémas affines. D'après 6.1.7 nous avons un foncteur :

$$\text{Spec} : \text{Ann}^\circ \longrightarrow \text{Aff}.$$

Montrez c'est une équivalence de catégories, et qu'un quasi-inverse est donné par le foncteur de sections globales du faisceau de fonctions $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

6.2.6 Exercice. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et U l'ouvert $D(f)$ pour $f \in A$. Montrez que $U = (U, \mathcal{O}_{X|U}) \simeq \text{Spec}(A_f)$.

Nous allons donner les premiers exemples de schémas non affines.

6.2.7 Sous-schémas ouverts. Soit X un schéma. Si $i : U \subset X$ est un ouvert de l'espace topologique sous-jacent à X , l'espace annelé (U, \mathcal{O}_U) avec $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U} = i^{-1}\mathcal{O}_X$, est un schéma (voir 5.5.4 pour la restriction d'un faisceau à un ouvert). En effet, soit $x \in U$ un point. Soit $V = \text{Spec}(A)$ un ouvert affine de X contenant x . Comme les ouverts distingués de V forment une base de sa topologie, il existe $f \in A$ tel que $W = D(f) \subset U$ contient x . Alors $(W, \mathcal{O}_W) = (W, \mathcal{O}_{X|W}) = (W, \mathcal{O}_{U|W})$ est un schéma affine et on a ainsi recouvert U par des schémas affines. On dit que la structure de schéma sur U est *induite* par celle de X .

6.2.8 Définition. Un *sous-schéma ouvert* de X est un ouvert $U \subset X$ muni de sa structure de schéma induit. Une *immersion ouverte* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} U \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma ouvert dans X .

6.2.9 Proposition. Soit $i : U \subset X$ un sous-schéma ouvert de X . Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas tel que $f(|Y|) \subset |U|$. Alors, il existe un unique morphisme de schémas $g : Y \rightarrow U$ tel que $f = i \circ g$.

Démonstration : Comme U est ouvert, l'application $g : |Y| \rightarrow |U|$ définie par $g(y) = f(y)$ est continue et vérifie $f = i \circ g$. Par l'adjonction (f^{-1}, f_*) , le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ détermine un morphisme $g^{-1}i^{-1}\mathcal{O}_X = f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Par l'adjonction (g^{-1}, g_*) , on obtient un morphisme $\mathcal{O}_U = i^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y$ que nous notons $g^\#$. Il est facile de vérifier que la paire $(g, g^\#)$ définit un morphisme de schémas. \square

6.2.10 Exemple (Ouvert non affine d'un schéma affine). Soit $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ le plan affine sur un corps k . Montrons que le sous-schéma ouvert $U = X \setminus \{0\}$, complémentaire de l'origine $\{0\} = V(x, y)$, n'est pas affine. Calculons les fonctions globales sur U . D'après la propriété de faisceau, une fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est déterminée par ses restrictions $f|_{D(x)}$ et $f|_{D(y)}$ qui coïncident sur $D(xy)$. Or $\mathcal{O}_X(D(x)) = k[x, y, 1/x]$ et $\mathcal{O}_X(D(y)) = k[x, y, 1/y]$, et les deux applications de restriction vers $\mathcal{O}_X(D(xy)) = k[x, y, 1/x, 1/y]$ sont les inclusions. Ainsi f est un élément de l'intersection $k[x, y, 1/x] \cap k[x, y, 1/y]$ prise dans $k[x, y, 1/x, 1/y]$, i.e. $f \in k[x, y]$. En conclusion la restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ est un isomorphisme. Si U était affine, en passant aux spectres on obtiendrait que l'inclusion $U \rightarrow X$ est un isomorphisme. Donc U n'est pas affine.

6.2.11 Exercice (Ouvert d'inversibilité d'une fonction). Soit X un schéma et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ une fonction régulière globale. Montrez que l'ensemble $X_f = \{x \in X, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de X .

6.2.12 Remarque culturelle. En géométrie différentielle, la définition traditionnelle d'une variété se fait au moyen de la notion d'*atlas*, qui est une collection de *cartes*; cette approche est facilitée par le fait qu'une variété différentielle possède une base composée d'ouverts tous isomorphes entre eux (des boules de \mathbb{R}^n), ce qui n'est pas le cas en géométrie algébrique. Donner une définition en termes d'espaces annelés est tout à fait possible, en prenant pour modèle local les paires (U, \mathcal{O}_U) composées d'un ouvert de \mathbb{R}^n muni de son faisceau de fonctions différentiables. Cette approche est adoptée par exemple dans le livre [Wed16] de Wedhorn.

6.3 Recollement

6.3.1 Motivation pour le recollement. La définition 6.2.4 des schémas peut être reformulée en adoptant un point de vue qui sera très utile pour *construire* de nouveaux schémas. Ceci mènera au procédé de *recollement*, qui sera vu comme l'opération inverse du *décollement*.

Donc, attachez vos ceintures, on va décoller ! Si X est un schéma, il possède un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ par des schémas affines. Pour distinguer l'ouvert $U_i \subset X$ et ce même ouvert vu comme un schéma abstrait indépendant, posons $X_i := U_i$. Les X_i forment une collection de schémas simples (car affines) obtenue en « décollant » les ouverts U_i que l'on imagine collés entre eux dans X . Le procédé de décollement consiste à remplacer X par la collection $\{X_i\}$. Pour l'inverser, c'est-à-dire pour recoller, il (faut et) suffit de conserver soigneusement l'information supplémentaire qui provient de la manière dont les U_i étaient agencés dans X . La principale difficulté conceptuelle de l'opération est de voir une *égalité* comme un type particulier d'*isomorphisme* de manière à rendre son utilisation plus souple ; ceci est lié aux propos de S. Awodey cités dans la figure 9. L'intersection $U_i \cap U_j$ est un ouvert de U_i , que l'on note $X_{i,j}$ lorsqu'il est vu dans X_i . Bien sûr, on dispose d'un isomorphisme

$$\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$$

puisque la source (un ouvert de X_i) et le but (un ouvert de X_j) sont tous deux isomorphes à $U_i \cap U_j$. Les trois propriétés évidentes (1) $\varphi_{i,i} = \text{id}$, (2) $\varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}$ et (3) $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ (cette dernière égalité a un sens sur une intersection appropriée $U_i \cap U_j \cap U_k$) fourniront réflexivité, symétrie et transitivité pour une relation d'équivalence qui permettra le recollement. Nous allons maintenant oublier X et les U_i pour présenter le procédé de recollement abstrait.

6.3.2 Théorème (Recollement) *Supposons donnés :*

- une famille de schémas $\{X_i\}_{i \in I}$,
- des familles d'ouverts $X_{i,j} \subset X_i$ pour $i, j \in I$,
- des isomorphismes de schémas $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \xrightarrow{\sim} X_{j,i}$ pour $i, j \in I$,

satisfaisant les conditions :

(Réfl) $X_{i,i} = X_i$ et $\varphi_{i,i} = \text{id}$ pour tout i ,

(Sym) $\varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}$,

(Tran) $\varphi_{i,j}(X_{i,j} \cap X_{i,k}) = X_{j,i} \cap X_{j,k}$ et $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ pour tous i, j, k .

Alors il existe un unique schéma X possédant un recouvrement par des ouverts $U_i \subset X$ isomorphes aux X_i , de telle manière que les intersections $U_i \cap U_j$ sont isomorphes aux $X_{i,j}$ et que les applications identiques $U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ s'identifient aux isomorphismes $\varphi_{i,j}$. Il est appelé le recollement des X_i le long des ouverts $X_{i,j}$, ou recollement des X_i le long des isomorphismes $\varphi_{i,j}$.

Démonstration : Commençons par remarquer que la question est un cas particulier d'existence de colimite. En effet, si on note $\alpha_{i,j} : X_{i,j} \hookrightarrow X_i$ l'inclusion ouverte, le recollement X s'il existe est un coégalisateur du diagramme :

$$\coprod_{i,j} X_{i,j} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Pi \alpha_{i,j}} \\ \xrightarrow{\Pi \alpha_{j,i} \circ \varphi_{i,j}} \end{array} \coprod_i X_i.$$

Ceci garantit l'unicité. Passons à l'existence.

Cas où tous les $X_{i,j}$ sont vides. Le schéma X est alors la *somme disjointe* (ou *réunion disjointe*) des X_i , notée $X := \coprod_{i \in I} X_i$. On le construit de la manière suivante. L'espace topologique sous-jacent est la somme (ou réunion) disjointe des X_i . Ses éléments sont des paires (i, x) avec $x \in X_i$, et ses ouverts sont les parties de la forme $U := \coprod_{i \in I} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de X_i . On dispose de morphismes d'inclusion $f_i : X_i \rightarrow X$ qui sont des applications continues ouvertes et fermées. On munit X du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X = \prod_{i \in I} (f_i)_* \mathcal{O}_{X_i}$. Pour chaque i , notons $\mathcal{U}_i = (U_{i,j})$ un recouvrement de X_i par des ouverts affines, comme dans la définition 6.2.4. À l'aide de f_i , on peut voir $U_{i,j}$ comme un ouvert de X . On voit facilement que la réunion $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_i$ est un recouvrement de (X, \mathcal{O}_X) par des ouverts affines. Donc X est un schéma.

Cas général. Nous allons expliquer la construction de X et laisser en exercice la vérification des propriétés annoncées. On note X' la somme disjointe des X_i , construite au cas précédent. Ses éléments sont des paires (i, x) avec $x \in X_i$. On munit X' de la relation définie par $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ si et seulement si $x_j = \varphi_{i,j}(x_i)$. Les trois conditions de compatibilité assurent que la relation est réflexive, symétrique et transitive i.e. une relation d'équivalence. On note X le quotient de X' par cette relation d'équivalence et $\pi : X' \rightarrow X$ l'application quotient. On munit X de la topologie quotient, i.e. une partie $U \subset X$ est déclarée ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset X'$ est ouvert. Par exemple, l'espace X_i identifié à un ouvert de X' a une image ouverte puisque $\pi^{-1}(\pi(X_i)) = \coprod_j X_{j,i}$. Ceci permet de démontrer que la restriction $X_i \hookrightarrow X' \rightarrow X$, qui est injective, induit un homéomorphisme entre X_i et l'image $U_i := \pi(X_i)$. Il reste à munir X d'un faisceau de fonctions \mathcal{O}_X . Pour ceci soit $U \subset X$ un ouvert et $U' = \pi^{-1}(U) \subset X'$ sa préimage. Comme X' est une somme disjointe, l'ouvert U' est réunion disjointe des ouverts $U'_i = U' \cap X_i$ qui contiennent des ouverts $U'_{i,j} = U' \cap X_{i,j}$ reliés par les isomorphismes de recollement $\varphi_{i,j}$. Avec ces notations, on pose :

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_{X'}(U'); f|_{U'_{i,j}} = \varphi_{i,j}^\#(f|_{U'_{j,i}}) \text{ pour tous } i, j\}.$$

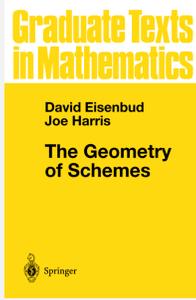
On obtient ainsi un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) . On vérifie facilement que l'homéomorphisme $X_i \simeq U_i$ est un isomorphisme d'espaces annelés entre le schéma (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) et l'espace annelé $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$. Il s'ensuit que l'espace annelé (X, \mathcal{O}_X) , recouvert par des schémas, est un schéma (voir la définition 6.2.4 et la phrase qui la suit). \square

6.3.3 Remarques. (1) Il est bien sûr suffisant de se donner des $X_{i,j}$ et des $\varphi_{i,j}$ pour $i \neq j$, mais nous avons préféré inclure les données $i = j$ pour mettre en évidence le fait que les trois conditions de compatibilité correspondent aux trois propriétés de la relation d'équivalence qui définit le recollement.

(2) En topologie, il n'est pas nécessaire que les parties $X_{i,j}$ soient ouvertes pour faire fonctionner la construction et obtenir un recollement. En revanche, en géométrie algébrique, si les $X_{i,j}$ ne sont pas ouverts, l'espace annelé obtenu par recollement est très loin d'être un schéma en général.

(3) Soient $(X_i, \varphi_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{j,i})$ et $(Y_i, \psi_{i,j} : Y_{i,j} \rightarrow Y_{j,i})$ deux collections de données comme dans le théorème 6.3.2. Soient X, Y les schémas obtenus par recollement. Soient $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ des morphismes tels que $f_i(X_{i,j}) \subset Y_{i,j}$ et $\psi_{i,j} \circ f_i = f_j \circ \varphi_{i,j}$ sur $X_{i,j}$, pour tous i, j . Alors les f_i se recollent en un morphisme $f : X \rightarrow Y$. Un cas particulier intéressant est celui où tous les Y_i sont égaux à Y .

(4) La donnée des schémas X_i , des ouverts $X_{i,j}$ et des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ peut sembler lourde à manipuler. En fait, dans la plupart des situations concrètes, ces objets sont souvent « naturels » au point où la vérification des conditions de compatibilité est à peu près triviale ; voir la figure 20.



« In these and indeed in almost all applications, we don't really need to give the maps $\psi_{\alpha\beta}$ explicitly : we are actually given a topological space $|X|$ and a family of open subsets $|X_\alpha|$, each endowed with the structure of an affine scheme — that is, with a structure sheaf \mathcal{O}_{X_α} — in such a way that $\mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha \cap X_\beta)$ is naturally identified with $\mathcal{O}_{X_\beta}(X_\alpha \cap X_\beta)$. For example, they might both be given as subsets of a fixed set. »

FIGURE 20 – Citation de D. Eisenbud et J. Harris, *The geometry of schemes*, § I.2.4 [EH00]

6.3.4 Remarque culturelle. Dans le théorème de recollement 6.3.2, les morphismes $X_i \rightarrow X$ sont des immersions ouvertes. Cependant, le recollement dans la catégorie des espaces topologiques peut se faire sans aucune hypothèse — les $X_i \rightarrow X$ n'ont même pas besoin d'être des injections : on construit la colimite ensembliste du diagramme $\coprod X_{i,j} \rightrightarrows \coprod X_i$ et on la munit de la topologie quotient. On peut se demander s'il est possible d'affaiblir les hypothèses sur $X_i \rightarrow X$ pour obtenir un énoncé de « recollement généralisé ». Il s'avère que c'est une excellente question, à laquelle Grothendieck a donné une réponse aussi profonde que fructueuse, dénommée *théorie de la descente fidèlement plate*. Il s'agit d'un sujet plus avancé que celui de ce cours ; pour un exposé, nous renvoyons au chapitre 14 de [GW20], et notamment au paragraphe « Faithfully flat descent ».

Le cas simple de la somme disjointe renferme déjà quelques subtilités que l'on voit sur deux exemples proposés en exercice.

6.3.5 Exercice (Sommes disjointes de schémas affines).

1. Montrez que $\mathrm{Spec}(A_1) \amalg \cdots \amalg \mathrm{Spec}(A_n) \simeq \mathrm{Spec}(A_1 \times \cdots \times A_n)$.
2. Soit k un corps. Soit $X = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ une somme disjointe dénombrable de k -points $X_i = \mathrm{Spec}(k)$. Calculez $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Montrez que X n'est pas un schéma affine. Montrez qu'il existe un morphisme $X \rightarrow \mathrm{Spec}(k^{\mathbb{N}})$ qui n'est pas surjectif.

6.3.6 Exercice (Recoler deux droites affines).

Soit k un corps. On note $X_1 = \mathrm{Spec}(k[s])$ et $X_2 = \mathrm{Spec}(k[t])$ deux copies de la droite affine, et $U_1 = D(s)$, $U_2 = D(t)$ les ouverts complémentaires de l'origine.

1. On appelle *droite projective sur k* et on note \mathbb{P}_k^1 le recollement de X_1 et X_2 le long de l'isomorphisme $U_1 \simeq U_2$ donné par le morphisme d'anneaux $k[s, s^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $s \mapsto t^{-1}$. Ensemblistement, c'est une droite affine complétée par un point à l'infini. Montrez que $\Gamma(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}) = k$.
2. On appelle *droite affine avec origine dédoublée* et on note D le recollement de X_1 et X_2 le long de l'isomorphisme $U_1 \simeq U_2$ donné par le morphisme d'anneaux $k[s, s^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $s \mapsto t$. Montrez que $\Gamma(D, \mathcal{O}_D) = k[s]$.

6.3.7 L'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. On construit l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ par le procédé de recollement. Pour cela, considérons des indéterminées t_0, \dots, t_n et l'anneau $K = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, \frac{1}{t_0 \cdots t_n}]$. Pour tout entier

$i \in \{0, \dots, n\}$, les n éléments $t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Z} . Ainsi l'anneau

$$A_i = \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i} \right]$$

est isomorphe à un anneau de polynômes sur \mathbb{Z} , donc le schéma $X_i = \text{Spec}(A_i)$ est un espace affine de dimension n au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Pour tout $j \neq i$, le schéma

$$X_{i,j} = D \left(\frac{t_j}{t_i} \right) = \text{Spec} \left(\mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j} \right] \right)$$

est un ouvert principal de X_i . De l'isomorphisme d'anneaux

$$u_{i,j} : \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i} \right] \longrightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j} \right]$$

donné par l'égalité comme sous-anneaux de K , on déduit un isomorphisme de schémas :

$$\varphi_{i,j} = \text{Spec}(u_{i,j}) : X_{i,j} \longrightarrow X_{j,i}.$$

Le fait que les $u_{i,j}$ soient des morphismes identiques dans un anneau ambiant K fait que toutes les conditions de compatibilité nécessaires au recollement sont automatiques. Par exemple, la condition $(\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j})|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}} = \varphi_{i,k}|_{X_{i,j} \cap X_{i,k}}$ revient à dire que les trois anneaux

$$\mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}, \frac{t_i}{t_j}, \frac{t_i}{t_k} \right] \quad , \quad \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_j}, \dots, \frac{t_n}{t_j}, \frac{t_j}{t_i}, \frac{t_j}{t_k} \right] \quad , \quad \mathbb{Z} \left[\frac{t_0}{t_k}, \dots, \frac{t_n}{t_k}, \frac{t_k}{t_i}, \frac{t_k}{t_j} \right]$$

sont égaux. On en déduit que les X_i se recollent en un schéma que l'on note $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$.

Nous décrirons plus loin le foncteur de points, ou la propriété universelle, de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$.

6.3.8 Exercice. Soit X le plan affine avec origine dédoublée, obtenu en recollant $X_1 = \mathbb{A}_k^2$ avec $X_2 = \mathbb{A}_k^2$ le long de leur ouvert commun $U_1 = U_2 = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$ (avec isomorphisme de recollement égal à l'identité). Montrez qu'il existe dans X deux ouverts affines dont l'intersection n'est pas affine.

6.4 Foncteur de points

La notion d'*anneau de base* expliquée au paragraphe A.0.12 a son pendant dans la théorie des schémas : le *schéma de base*. Lorsqu'on étudie les variétés algébriques sur un corps de base k , les éléments de ce corps jouent le rôle de constantes et les morphismes entre variétés sont les *k -morphisms*. Concrètement, dans le langage des schémas ceci signifie que les objets qu'on étudie sont des morphismes $s_X : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ et que les morphismes entre X et Y sont les morphismes $f : X \rightarrow Y$ tels que $s_Y \circ f = s_X$. (Dans le cas affine ceci signifie simplement que X est spectre d'un anneau A qui est une *k -algèbre*, et que les morphismes considérés sont les morphismes *de k -algèbres* $A \rightarrow B$.) Plus généralement, il est commode de travailler avec des schémas sur un schéma de base fixé S .

6.4.1 Définition. Soit S un schéma. On appelle *catégorie des schémas au-dessus de S* et on note Sch/S la catégorie dont les objets sont les schémas X équipés d'un morphisme $s_X : X \rightarrow S$, et dont les morphismes sont définis par $\text{Hom}_{\text{Sch}/S}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ tel que } s_Y \circ f = s_X\}$.

Un objet de Sch/S est parfois noté simplement X/S . Un morphisme entre X/S et Y/S est parfois appelé S -morphisme, et on note $\text{Hom}_S(X, Y)$ au lieu de $\text{Hom}_{\text{Sch}/S}(X, Y)$. Par construction, le schéma S est un objet terminal de Sch/S . Lorsque $S = \text{Spec}(A)$, on parle aussi de la catégorie Sch/A des A -schémas, on note $\text{Hom}_A(X, Y)$ au lieu de $\text{Hom}_S(X, Y)$, etc. Si X est un A -schéma et $A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on note parfois abusivement $X \otimes_A B$ au lieu de $X \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$.

6.4.2 Points d'un schéma. Nous allons voir comment la notion habituelle, naïve de « point » prend une place très importante dans le monde des schémas.

6.4.3 Lemme. *Soient X un schéma. Pour tout corps K , on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $\text{Spec}(K) \rightarrow X$ et l'ensemble des paires (x, i) composés d'un point $x \in |X|$ et d'un morphisme de corps $i : \kappa(x) \rightarrow K$.*

Démonstration : L'ensemble sous-jacent à $\text{Spec}(K)$ est un point que nous noterons t . Soit $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ un morphisme et $x = f(t)$. Soit $U = \text{Spec}(A) \subset X$ un ouvert affine contenant x , avec $x = [p]$. D'après 6.2.9, on dispose d'un morphisme $g : \text{Spec}(K) \rightarrow U$ par lequel f se factorise. Comme $g(t) = x$, le morphisme d'anneaux correspondant $\varphi : A \rightarrow K$ vérifie $\varphi^{-1}(0) = p$ donc induit des morphismes $A_p \rightarrow K$ puis $A_p/pA_p \rightarrow K$, i.e. $\kappa(x) \rightarrow K$. Réciproquement, étant donné $x \in |X|$ et $i : \kappa(x) \rightarrow K$ on peut construire un morphisme $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ de la manière suivante. On choisit $U = \text{Spec}(A)$ tel que $x = [p]$. En passant au spectre, les morphismes d'anneaux $A \rightarrow A_p \rightarrow A_p/pA_p = \kappa(x) \rightarrow K$ donnent un morphisme de schémas $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(A) = U \subset X$. Ce morphisme ne dépend pas du choix de U , car si U' est un autre voisinage ouvert affine, on peut en choisir un troisième $V \subset U \cap U'$ et utiliser les compatibilités des morphismes de restriction. Pour finir on montre que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. \square

6.4.4 Exercice. Soit k un corps et $A = k[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une k -algèbre de type fini. Soit K/k une extension de corps. Montrez que l'ensemble des K -points de $X = \text{Spec}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des solutions dans K du système $f_1 = \dots = f_r = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tels que $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$.

6.4.5 Exercice. Le lemme 6.4.3 montre que les morphismes $\text{Spec}(K) \rightarrow X$ depuis le spectre d'un corps permettent de reconstituer l'ensemble des points de l'espace topologique $|X|$. Adapter la démonstration pour montrer plus généralement que pour tout anneau local \mathcal{O} , on a une bijection entre l'ensemble des morphismes $\text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$ et l'ensemble des paires (x, i) composés d'un point $x \in |X|$ et d'un morphisme d'anneaux locaux $i : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}$.

Ainsi, les morphismes $\text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$ permettent en quelque sorte de reconstituer les voisinages des points dans $|X|$. Conformément à la philosophie du lemme de Yoneda, il est utile d'élargir encore le point de vue et d'accepter des « points » encore plus généraux, qui déterminent X entièrement.

6.4.6 Définition. Un *point de X à valeurs dans un anneau A* ou *A -point de X* est un morphisme de schémas $\text{Spec}(A) \rightarrow X$. Plus généralement, un *point de X à valeurs dans un schéma T* ou *T -point de X* est un morphisme de schémas $T \rightarrow X$. Si X est un S -schéma, un point de X/S à valeurs dans un S -schéma T est un morphisme de S -schémas $T \rightarrow X$. On note $h_X(T) = \text{Hom}_S(T, X)$ l'ensemble des T -points de X/S . On appelle *foncteur des points de X/S* le foncteur $h_X : (\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow \text{Ens}$ ainsi défini.

6.5 L'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$

6.5.1 Définition. On appelle *espace affine de dimension n sur \mathbb{Z}* le schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n])$ où t_1, \dots, t_n sont des indéterminées. Ce schéma possède n fonctions régulières globales distinguées t_1, \dots, t_n .

Nous allons donner une description du foncteur de points de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. Plus généralement voici une description du foncteur de points d'un schéma affine $\text{Spec}(A)$.

6.5.2 Théorème. Soit A un anneau et T un schéma. L'application qui à $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ associe le morphisme $A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ obtenu en prenant les sections globales de $f^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_T$ définit une bijection :

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(T, \text{Spec}(A)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)).$$

Cette bijection est fonctorielle en A et T .

On peut interpréter cet énoncé comme l'existence d'un adjoint pour l'inclusion de la catégorie des schémas affines dans celle de tous les schémas (prenez garde au fait qu'ici les foncteurs sont contravariants ce qui nécessite d'être soigneux dans la lecture de la définition donnée dans 4.4).

Démonstration : Construisons une application en sens inverse. Soit $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_T(T)$ un morphisme d'anneaux. Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(B)$ dans T , la composée $A \rightarrow \mathcal{O}_T(T) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_T(U) = B$ définit en passant aux spectres un morphisme de schémas $f_U : U \rightarrow \text{Spec}(A)$. Si $V = \text{Spec}(C)$ est un autre ouvert affine, et $W = \text{Spec}(D)$ est un ouvert affine inclus dans $U \cap V$, la propriété de faisceau de \mathcal{O}_T fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{res}_U^T & \rightarrow & \mathcal{O}_T(U) = B & \xrightarrow{\text{res}_W^U} & & \\ & & \searrow & & & \searrow & & \\ A & \longrightarrow & \mathcal{O}_T(T) & & & & \mathcal{O}_T(W) = D. & \\ & & \searrow & & & \nearrow & & \\ & & \text{res}_V^T & \rightarrow & \mathcal{O}_T(V) = C & \xrightarrow{\text{res}_W^V} & & \end{array}$$

En passant aux spectres, ceci montre que f_U et f_V coïncident sur W . Comme ceci est vrai pour tous les ouverts affines W et que ceux-ci recouvrent $U \cap V$, on voit que f_U et f_V coïncident sur $U \cap V$. Ils se recollent donc en un morphisme $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ que nous noterons $\Delta(\varphi)$.

Il nous faut maintenant démontrer que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Soit $f : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas, $\varphi = \Gamma(f^\#) : A \rightarrow \mathcal{O}_T(T)$ le morphisme d'anneaux induit, et $f' = \Delta(\varphi) : T \rightarrow \text{Spec}(A)$ construit comme précédemment. Pour montrer que $f = f'$ il suffit de le faire sur chaque ouvert $U = \text{Spec}(B)$ d'un recouvrement de T . Or $f|_U$ et $f'|_U$ sont deux morphismes entre schémas affines, donc il suffit de montrer que les morphismes d'anneaux associés sont égaux. Or le morphisme d'anneaux associé à $f|_U$ est $\text{res}_U^T \circ \varphi : A \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_T)$, et il en va de même pour f' , comme la construction de $f(\varphi)$ le montre. Nous laissons à la lectrice la vérification du fait que $\Gamma(\Delta(\varphi)^\#) = \varphi$, en donnant un indice : recouvrir T par des ouverts affines U_i , $i \in I$ puis utiliser d'une part le fait que $\Gamma(\Delta(\varphi)^\#|_{U_i}) = \text{res}_{U_i} \circ \varphi$ et d'autre part le fait que $\mathcal{O}_T(T)$ est l'égalisateur des deux flèches $\prod \mathcal{O}_T(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{O}_T(U_{i,j})$, c'est-à-dire l'ensemble des collections (s_i) telles que $s_i|_{U_{i,j}} = s_j|_{U_{i,j}}$ pour tous i, j .

Pour finir, il faut démontrer que cette bijection est fonctorielle en A et X . Ceci ne présente pas de vraie difficulté et nous laissons l'exercice au lecteur. \square

6.5.3 Remarque. En prenant $A = \mathbb{Z}$ dans 6.5.2, on voit que tout schéma possède un et un seul morphisme vers $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. On dit que $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un *objet terminal* (ou *final*) de la catégorie des schémas.

6.5.4 Corollaire. Soit $\mathcal{H}om_{\text{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n)$ le faisceau sur X dont les sections sur un ouvert U sont les morphismes de schémas $U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. On a des isomorphismes fonctoriels en X :

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}om_{\text{Sch}}(X, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X)^n.$$

En particulier, les fonctions sur X , définies précédemment comme les sections du faisceau \mathcal{O}_X , peuvent également être vues comme morphismes de X vers la droite affine. \square

Démonstration : Le premier isomorphisme provient du théorème précédent. Comme il est valable pour tout ouvert $U \subset X$, il donne l'isomorphisme de faisceaux indiqué. \square

Reformulons ce résultat comme une propriété universelle : pour tout schéma X et tout n -uplet de fonctions régulières $(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$, il existe un unique morphisme de schémas $f : X \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ tel que $f^\sharp(t_i) = f_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

6.5.5 Exercice. Décrivez les différents types de points de $X = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$, la droite affine sur \mathbb{Z} , comme dans [EH00], § II.4.3, exercice II-37.

6.5.6 Exercice (Schéma des racines de l'unité). Soit $n \geq 0$ un entier. On considère le foncteur $F : \text{Sch}^\circ \rightarrow \text{Ens}$ tel que $F(X)$ est égal à l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Démontrez que F est représentable par un schéma affine dont vous donnerez l'anneau de fonctions globales. (Comme $F(X)$ est un groupe, fonctoriellement en X , on dit que le schéma qui représente F est un schéma en groupes.)

6.6 Produits fibrés

6.6.1 Produit de schémas. Le produit de variétés est une opération fondamentale ; en géométrie différentielle, c'est lui qui permet de définir la variété \mathbb{R}^n à partir de \mathbb{R} . En géométrie algébrique, on s'attend de même à ce que l'opération de produit permette de définir l'espace affine \mathbb{A}_k^n à partir de la droite affine \mathbb{A}_k^1 . Malheureusement, en ce qui concerne les espaces topologiques ce n'est pas du tout le cas. Par exemple, l'espace $|\mathbb{A}_k^2|$ est beaucoup plus gros que $|\mathbb{A}_k^1| \times |\mathbb{A}_k^1|$. En effet, supposant le corps k algébriquement clos pour simplifier, on a $|\mathbb{A}_k^1| = k \cup \{\eta_{\mathbb{A}^1}\}$ où $\eta_{\mathbb{A}^1}$ est le point générique, alors que $|\mathbb{A}_k^2|$ comprend k^2 (points de dimension 0), les points génériques de courbes irréductibles planes (points de dimension 1), et un point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$. (Nous renvoyons à 3.1.10 pour la description de \mathbb{A}_k^2 .) Il y a une application continue naturelle $|\mathbb{A}_k^2| \rightarrow |\mathbb{A}_k^1| \times |\mathbb{A}_k^1|$ décrite ainsi :

- le point fermé $(a, b) \in k^2$ est envoyé sur le couple (a, b) ,
- le point générique η_C d'une courbe verticale $C = \{a\} \times \mathbb{A}^1(k)$ est envoyé sur $(a, \eta_{\mathbb{A}^1})$, le point générique η_C d'une courbe horizontale $C = \mathbb{A}^1(k) \times \{b\}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, b)$, et le point générique η_C d'une courbe « transverse » est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$,
- le point générique $\eta_{\mathbb{A}^2}$ est envoyé sur $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$.

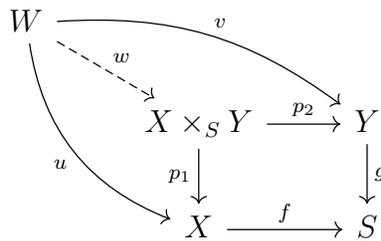
On voit que les courbes transverses contribuent à grossir excessivement la fibre au-dessus de $(\eta_{\mathbb{A}^1}, \eta_{\mathbb{A}^1})$. En fait la bonne définition du produit est la définition *catégorique*, c'est celle que nous adoptons dans la catégorie des schémas.

6.6.2 Définition. Dans une catégorie \mathcal{C} , le *produit* de deux objets X, Y est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \rightarrow X$ et $p_2 : Z \rightarrow Y$ tel que pour toute paire de morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$, il existe un unique morphisme $w : W \rightarrow Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$.

6.6.3 Exercice. Démontrez que le produit $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \times \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ est égal à $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^2$.

Nous revenons maintenant sur les produits fibrés, introduits dans 4.5.14, pour démontrer leur existence dans la catégorie des schémas.

6.6.4 Définition. Dans une catégorie C , le *produit fibré* de deux morphismes $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ est un objet Z muni de deux morphismes $p_1 : Z \rightarrow X$ et $p_2 : Z \rightarrow Y$ tels que $f p_1 = g p_2$, avec la propriété suivante : pour toute paire de morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $f u = g v$, il existe un unique morphisme $w : W \rightarrow Z$ tel que $u = p_1 w$ et $v = p_2 w$. On dit que u et v sont les *composantes* de w et on note $w = (u, v)$. Lorsqu'il existe, le produit fibré est unique à unique isomorphisme près et il est noté $X \times_{f,S,g} Y$ ou simplement $X \times_S Y$.



Par exemple, dans la catégorie des ensembles le produit fibré est l'ensemble $\{(x, y); f(x) = g(y)\}$ muni des deux projections naturelles. Dans la catégorie des schémas, le produit fibré existe et nous allons le construire par recollement à partir du cas affine.

6.6.5 Exercice. Soient C une catégorie et S un objet de C . On note C/S , et on appelle *catégorie des objets de C au-dessus de S* , la catégorie définie comme suit. Les objets de C/S sont les paires (X, f) composées d'un objet $X \in C$ et un morphisme $f : X \rightarrow S$. Les morphismes entre (X, f) et (Y, g) sont les morphismes $u : X \rightarrow Y$ de C tels que $g \circ u = f$. Démontrez que le produit (absolu) de (X, f) et (Y, g) dans C/S est « la même chose » que le produit fibré de $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ dans C .

6.6.6 Théorème. Le produit fibré $X \times_S Y$ de deux morphismes $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ existe dans la catégorie des schémas.

Démonstration : *Premier cas :* $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$, $S = \text{Spec}(R)$ tous trois affines. Dans ce cas, se donner des morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $f u = g v$ est équivalent à se donner des morphismes d'anneaux $u' : A \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ et $v' : B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ tels que $u' f' = v' g'$, d'après le théorème 6.5.2. Comme la somme amalgamée de A et B le long de R dans la catégorie

des anneaux commutatifs unitaires est leur produit tensoriel (c'est la propriété universelle donnée ci-dessus), on en déduit qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $w' : A \otimes_R B \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ par lequel u' et v' se factorisent. Au morphisme w' est associé (par 6.5.2 encore) un morphisme de schémas $w : W \rightarrow \text{Spec}(A \otimes_R B)$. Ceci montre que $X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_R B)$.

Deuxième cas : seul S est affine. Choisissons des recouvrements ouverts affines $X = \cup X_i$ et $Y = \cup Y_k$ et notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$, $Y_{k,l} = Y_k \cap Y_l$. D'après le premier cas, les produits fibrés $Z_{i,k} := X_i \times_S Y_k$ existent. Notons $Z = Z_{i,j,k,l}$ le sous-schéma ouvert $p_1^{-1}(X_{i,j}) \cap p_2^{-1}(Y_{k,l})$ dans $Z_{i,k} = X_i \times_S Y_k$, où $p_1 : Z_{i,k} \rightarrow X_i$ et $p_2 : Z_{i,k} \rightarrow Y_k$ sont les projections. Utilisant la proposition 6.2.9, on vérifie immédiatement que Z possède la propriété universelle du produit fibré $X_{i,j} \times_S Y_{k,l}$. Ceci réalise ce produit fibré comme un ouvert de $Z_{i,k}$ et la même construction permet de le voir comme un ouvert de $Z_{i,l}$, $Z_{j,k}$ et $Z_{j,l}$. On peut alors recoller les schémas $Z_{i,k}$ le long des ouverts $Z_{i,j,k,l}$ pour former un schéma $X \times_S Y$. (Il s'agit d'un recollement ordinaire dans lequel l'ensemble d'indices de la famille de schémas à recoller est un produit cartésien de deux ensembles.) Vérifions que c'est bien le produit fibré attendu. Étant donné $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $fu = gv$, on considère les ouverts $W_{i,k} = u^{-1}(X_i) \cap v^{-1}(Y_k)$ dans W . On construit des morphismes $W_{i,k} \rightarrow X_i \times_S Y_k$ qui se recollent en un morphisme $W \rightarrow X \times_S Y$.

Troisième cas : cas général. Soit $S = \cup S_i$ un recouvrement de S par des ouverts affines. Soient $X_i = f^{-1}(S_i)$ et $Y_i = g^{-1}(S_i)$ qui sont ouverts dans X et Y . Par restriction, on dispose de morphismes $f_i : X_i \rightarrow S_i$ et $g_i : Y_i \rightarrow S_i$. D'après le deuxième cas, les produits fibrés $X_i \times_{S_i} Y_i$ existent. Il n'est pas difficile de voir que les produits fibrés $X_{i,j} \times_{S_{i,j}} Y_{i,j}$ existent également et se réalisent comme des ouverts dans $X_i \times_{S_i} Y_i$ et dans $X_j \times_{S_j} Y_j$. Ces derniers se recollent donc pour former un schéma $X \times_S Y$ pour lequel on vérifie comme précédemment la propriété de produit fibré. \square

Observons que comme $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un objet terminal pour la catégorie des schémas (cf 6.5.3), en prenant $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ dans le théorème on obtient l'existence de produits absolus $X \times Y$ dans Sch.

Nous voici en mesure de définir l'espace affine relatif de dimension n , en termes de son foncteur de points comme dans le corollaire 6.5.4, puis de démontrer son existence comme schéma.

6.6.7 Proposition. *Soit S un schéma et n un entier. Il existe un S -schéma noté \mathbb{A}_S^n et appelé espace affine relatif sur S de dimension n , muni de n fonctions régulières globales t_1, \dots, t_n , ayant la propriété universelle suivante : pour tout S -schéma T , l'application qui à un S -morphisme $f : T \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ associe le n -uplet de fonctions $(f^\sharp(t_1), \dots, f^\sharp(t_n))$ induit une bijection fonctorielle en T :*

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_S^n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n.$$

Démonstration : Considérons $X := \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S$ vu comme un S -schéma à l'aide de la deuxième projection $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S \rightarrow S$. Il suffit de démontrer que X satisfait la propriété universelle annoncée. La propriété universelle du produit qui définit X fournit :

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S) = \{ \text{couples } (u : T \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n, v : T \rightarrow S) \text{ tels que } v = s_T \}$$

où $s_T : T \rightarrow S$ est le morphisme de structure qui fait de T un S -schéma. Ainsi v est entièrement déterminé par T , et on en déduit que

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times S) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n$$

d'après la propriété universelle de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$. \square

6.6.8 Exercice. Démontrez que si A est un anneau quelconque, on a $\mathbb{A}_A^n = \text{Spec}(A[t_1, \dots, t_n])$. Démontrez que si S est un schéma quelconque, on peut construire \mathbb{A}_S^n en choisissant un recouvrement de S par des ouverts affines $S_i = \text{Spec}(A_i)$ et en recollant les schémas $\mathbb{A}_{A_i}^n$ le long d'isomorphismes convenables (et dont l'existence est donnée par une certaine propriété universelle).

6.6.9 Exercice. Soient X/S et Y/S deux S -schémas. Montrez qu'il existe une application naturelle $|X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ et qu'elle est surjective.

6.6.10 Exercice. Soit S un schéma et $S' \rightarrow S$ un morphisme.

1. Définissez un foncteur *changement de base* $\text{Sch}/S \rightarrow \text{Sch}/S'$, $X \mapsto X_{S'} := X \times_S S'$.
2. Montrez que le composé des changements de base par $S' \rightarrow S$ et $S'' \rightarrow S'$ est canoniquement isomorphe au changement de base par $S'' \rightarrow S' \rightarrow S$.
3. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. Montrez que si f est une immersion ouverte, alors pour tout $S' \rightarrow S$, le morphisme $f_{S'} : X_{S'} \rightarrow Y_{S'}$ est une immersion ouverte. On dit que la propriété d'être une immersion est *stable par changement de base*.

6.6.11 Fibres, intersections, diagonales, égalisateurs. L'existence de produits fibrés de schémas a pour conséquence que certains objets habituels en géométrie ont un sens naturel comme schémas. Nous donnons quatre exemples.

1. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $y \in Y$ un point vu comme un morphisme de schémas $\text{Spec}(\kappa(y)) \rightarrow Y$, cf 6.4.3. La *fibre de f en y* , notée $f^{-1}(y)$ ou X_y , est par définition le schéma $X \times_Y \text{Spec}(\kappa(y))$.
2. Soient Y, Z deux sous-schémas ouverts d'un schéma X . L'*intersection de Y et Z dans X* , notée $Y \cap Z$, est par définition le schéma $Y \times_X Z$. (Nous n'avons défini pour l'instant que les sous-schémas ouverts mais cette définition sera valable également pour les sous-schémas fermés ou localement fermés.)
3. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. La *diagonale relative de X/S* ou *diagonale du S -schéma X* est par définition le morphisme $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ dont les deux composantes sont $\text{id} : X \rightarrow X$.
4. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux morphismes de schémas de mêmes source et but. Soit $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ le morphisme de composantes f et g . Soit $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$ la diagonale de Y . L'*égalisateur de f et g* est par définition le schéma $X \times_{(f,g), Y \times Y, \Delta} Y$.

6.6.12 Exercice (Quelques exemples de produits fibrés).

1. On considère le morphisme d'élévation à la puissance n -ième dans la droite affine complexe, plus précisément le morphisme $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ donné par le morphisme de \mathbb{C} -algèbres $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$ qui envoie t sur t^n . Calculez la fibre au sens des schémas au-dessus d'un point fermé.
2. Dans le plan affine complexe $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, calculez l'intersection au sens des schémas de la parabole d'équation $y = x^2$ et d'une droite horizontale d'équation $y = a$, $a \in \mathbb{C}$.
3. Calculez la diagonale relative du \mathbb{C} -schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$. Calculez la diagonale relative de l'immersion ouverte donnée par un ouvert affine principal $D(f) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$. Montrez que la diagonale relative d'un monomorphisme de schémas est un isomorphisme.

7 Modules sur les schémas

Le foncteur Spectre permet de plonger la catégorie des anneaux dans celle des schémas. De même, on peut plonger la catégorie des modules sur un anneau dans une catégorie de modules sur les schémas, et les modules sur les schémas jouent un rôle aussi fondamental que le rôle joué par les modules sur les anneaux.

7.1 Rappels sur les modules sur les espaces annelés

Un schéma $X = (X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé d'un type particulier. Pour l'étudier, on dispose donc de l'outil fourni par les \mathcal{O}_X -modules et les diverses opérations provenant de la théorie des faisceaux et de la théorie algébrique des modules, dont les principales ont été présentées dans les sous-sections 5.4 et 5.5.

Rappelons brièvement ces constructions.

(produit) Soit $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ une famille de faisceaux. Le préfaisceau $U \mapsto \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ est un faisceau. Il est appelé *faisceau produit* des \mathcal{F}_i et noté $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(somme) Le préfaisceau $U \mapsto \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ n'est pas un faisceau en général (il l'est si I est fini). Le faisceau associé est appelé *faisceau somme directe* des \mathcal{F}_i et noté $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(noyau) Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux abéliens. Le préfaisceau $U \mapsto \ker(\varphi(U))$ est un faisceau. Il est appelé *noyau de φ* et noté $\ker(\varphi)$.

(image) Le préfaisceau $U \mapsto \text{im}(\varphi(U))$ n'est pas un faisceau en général. Le faisceau associé est appelé *image de φ* et noté $\text{im}(\varphi)$.

(conoyau) Le préfaisceau $U \mapsto \text{coker}(\varphi(U))$ n'est pas un faisceau en général. Le faisceau associé est appelé *conoyau de φ* et noté $\text{coker}(\varphi)$.

(\otimes) Soient \mathcal{F}, \mathcal{G} deux faisceaux de \mathcal{O}_X -modules. Le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ n'est pas un faisceau en général. Le faisceau associé est appelé *produit tensoriel de \mathcal{F} et \mathcal{G}* et noté $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$.

7.1.1 Définition.

- Un *faisceau de \mathcal{O}_X -modules* ou simplement *\mathcal{O}_X -module* est un faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X muni d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ satisfaisant les axiomes d'un module sur un anneau. Autrement dit, pour tout ouvert $U \subset X$ le groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module de telle sorte que la loi externe pour les applications de restriction $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est compatible aux applications $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$, pour toute inclusion d'ouverts $U \subset V$.
- Un *morphisme de \mathcal{O}_X -modules* est un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varphi(U)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules pour tout U . On note $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des \mathcal{O}_X -modules.

Le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de \mathcal{O}_X -modules est un \mathcal{O}_X -module. La notion de sous-module est immédiate. Le quotient d'un \mathcal{O}_X -module par un sous- \mathcal{O}_X -module est un \mathcal{O}_X -module. Une somme directe, ou un produit direct de \mathcal{O}_X -modules est un \mathcal{O}_X -module.

Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux \mathcal{O}_X -modules, alors le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ est un \mathcal{O}_X -module appelé *produit tensoriel de \mathcal{F} et \mathcal{G}* et noté $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. Le préfaisceau $U \mapsto$

$\text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ des morphismes locaux entre \mathcal{F} et \mathcal{G} est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules appelé *faisceau des morphismes entre \mathcal{F} et \mathcal{G}* et noté $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, le faisceau $f_*\mathcal{F}$ est naturellement un $f_*\mathcal{O}_X$ -module et le morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ permet de le voir comme un \mathcal{O}_Y -module. Si \mathcal{G} est un \mathcal{O}_Y -module, le faisceau $f^{-1}\mathcal{G}$ est naturellement un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module. Le morphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ déduit de f^\sharp par adjonction permet de définir le \mathcal{O}_X -module $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. On a ainsi défini des foncteurs image directe $f_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ et image inverse $f^* : \text{Mod}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$.

7.1.2 Proposition (Adjonction (f^*, f_*)). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Alors on a une bijection canonique, fonctorielle en $\mathcal{F} \in \text{Mod}(X)$ et $\mathcal{G} \in \text{Mod}(Y)$:

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Mod}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Démonstration : Exercice. Indication : utiliser l'adjonction (f^{-1}, f_*) des faisceaux. □

7.1.3 Exercice. Soient X un schéma et $x \in |X|$ un point vu comme un morphisme $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$ où $k = \kappa(x)$ est le corps résiduel (lemme 6.4.3). On s'intéresse aux adjonctions (x^{-1}, x_*) entre catégories de faisceaux abéliens et (x^*, x_*) entre catégories de faisceaux de modules.

- (1) Décrivez les foncteurs $x_* : \text{Ab}(\text{Spec}(k)) \rightarrow \text{Ab}(X)$ et $x_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$. Dans tous les cas on appelle $x_*\mathcal{F}$ un *faisceau gratte-ciel* en x .
- (2) Soit \mathcal{F} un faisceau d'ensembles ou de groupes abéliens sur X . Montrez que l'image inverse $x^{-1}\mathcal{F}$ est (le faisceau sur $\text{Spec}(k)$ associé à) la fibre \mathcal{F}_x .
- (2) Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_X -modules. Décrivez l'image inverse $x^*\mathcal{F}$. Le k -espace vectoriel $\mathcal{F}(x) = \Gamma(\text{Spec}(k), x^*\mathcal{F})$ est encore appelé *fibre de \mathcal{F} en x* .

7.1.4 Exercice. Démontrez les faits suivants. Soient X un schéma et $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ des \mathcal{O}_X -modules.

- (1) (Adjonction $(\otimes, \mathcal{H}om)$) Il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

- (2) (Dual et $\mathcal{H}om$) Il existe un morphisme canonique $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui est un isomorphisme si \mathcal{F} est localement libre de rang fini.
- (3) Il existe un morphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})$ qui est un isomorphisme si \mathcal{F} ou \mathcal{H} est localement libre de rang fini.

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module et \mathcal{G}, \mathcal{H} des \mathcal{O}_Y -modules.

- (4) (Formule de projection) Il existe un morphisme canonique $f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \rightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})$. Si \mathcal{G} est localement libre, ce morphisme est un isomorphisme.
- (5) (f^* et $\mathcal{H}om$) Il existe un morphisme canonique $f^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{H})$ qui est un isomorphisme si \mathcal{G} est localement libre de rang fini.
- (6) (f^* et dual, cas particulier de (5) où $\mathcal{H} = \mathcal{O}_Y$.) Il existe un morphisme canonique $f^*(\mathcal{G}^\vee) \rightarrow (f^*\mathcal{G})^\vee$ qui est un isomorphisme si \mathcal{G} est localement libre de rang fini.

7.2 Modules quasi-cohérents sur les schémas

Pour tout anneau A , un module M définit un \mathcal{O}_X -module sur $X = \text{Spec}(A)$ par le même procédé naturel que celui qui nous a permis de définir le faisceau de fonctions \mathcal{O}_X .

Pour tout $f \in A$, on note classiquement $M[1/f]$ ou M_f le localisé de M par rapport à la partie multiplicative $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. C'est un A_f -module dont les propriétés de base sont l'objet de l'exercice suivant.

7.2.1 Exercice (Localisation de modules). Soient A un anneau, $S \subset A$ une partie, M un A -module. Soit $u : A \rightarrow S^{-1}A$ le localisé de A par rapport à S . Démontrez que :

1. Il existe un A -module $S^{-1}M$ et un morphisme de A -modules $v : M \rightarrow S^{-1}M$, appelé *localisé de M par rapport à S* , vérifiant la propriété universelle suivante :
 - (a) pour tout $s \in S$, l'endomorphisme $u(s) : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M, x \mapsto u(s)x$ est un isomorphisme,
 - (b) pour tout morphisme de A -modules $g : M \rightarrow N$ tel que $u(s) : N \rightarrow N$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme de A -modules $g' : S^{-1}M \rightarrow N$ tel que $g = g' \circ v$.
2. La structure de A -module de $S^{-1}M$ (donnée par un morphisme d'anneaux $A \rightarrow \text{End}(S^{-1}M)$) se factorise de manière unique en une structure de $S^{-1}A$ -module.

7.2.2 Proposition. Sur $X = \text{Spec}(A)$, les données suivantes :

- (1) $\mathcal{F}(D(f)) = M_f$ pour tout $f \in A$,
- (2) $\text{res}_{D(g), D(f)} : M_g \rightarrow M_f$ égal à l'application naturelle, pour toute inclusion $D(f) \subset D(g)$,

définissent un \mathcal{B} -faisceau. On note $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ le faisceau qu'il détermine. La fibre de ce faisceau en un point $x = [p]$ est le A_p -module $\mathcal{F} = M_p$. Tout morphisme de A -modules $u : M \rightarrow N$ définit un morphisme de \mathcal{O}_X -modules $\tilde{u} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$.

Démonstration : La preuve est la même que celle de 6.1.5. □

7.2.3 Proposition. Soit A un anneau et M, N deux A -modules. Les applications

$$\text{Hom}_A(M, N) \begin{array}{c} \xrightarrow{u \rightarrow \tilde{u}} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} \text{Hom}_X(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre.

Démonstration : Soit $u : M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules et $\varphi = \tilde{u}$. L'égalité $u = \Gamma(\varphi)$ découle de la définition. Soit $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ un morphisme de \mathcal{O}_X -modules et $u = \Gamma(\varphi) = \varphi(X)$. Par compatibilité de φ aux restrictions, pour tout ouvert principal $U = D(f)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi(X)} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \xrightarrow{\varphi(U)} & N_f \end{array}$$

Ceci montre que $\varphi(U)(m) = u(m)$ pour tout $m \in M$. Comme $\varphi(U)$ est un morphisme de A_f -modules, on a alors $\varphi(U)(m/f^n) = u(m)/f^n$ pour tous $m \in M, n \geq 0$. Ceci montre que $\varphi = \tilde{u}$. □

7.2.4 Proposition. Si $\cdots \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow \cdots$ est une suite exacte de A -modules, alors $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$ est une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules, où $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ etc. En particulier, le foncteur tilde préserve les noyaux, les conoyaux et les images : le noyau du tilde est le tilde du noyau, etc.

Démonstration : Soit $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{v} M'' \rightarrow \cdots$ une suite exacte de A -modules. Soit $x = [p]$ un point de X . Comme la localisation des modules par rapport à une partie multiplicative est un foncteur exact (voir [Mat89], th. 4.5), on déduit une suite exacte $\cdots \rightarrow M_p \rightarrow M'_p \rightarrow M''_p \rightarrow \cdots$. Comme $M_p = \mathcal{F}_x$, cette suite se réécrit $\cdots \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{u} \mathcal{F}'_x \xrightarrow{v} \mathcal{F}''_x \rightarrow \cdots$. Or le germe en un point du noyau d'un morphisme de faisceaux de modules est le noyau du morphisme sur les germes, en symboles : $\ker(\varphi_x) = \ker(\varphi)_x$ pour un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. La même propriété vaut pour les images de morphismes. Il s'ensuit que l'inclusion de faisceaux $\text{im}(u) \rightarrow \ker(v)$ est un isomorphisme sur les fibres, donc un isomorphisme (voir 5.3.7), donc la suite $\cdots \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \cdots$ est exacte. \square

7.2.5 Remarque. Considérons deux catégories C, D où la notion de suite exacte a un sens. Si un foncteur $F : C \rightarrow D$ transforme suites exactes en suites exactes, on dit que c'est un foncteur *exact*. Comme toute suite exacte $\cdots \rightarrow M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{u'} M'' \xrightarrow{u''} \cdots$ peut être décomposée en suites exactes courtes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker(u) \longrightarrow M \longrightarrow \text{im}(u) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \ker(u') \longrightarrow M' \longrightarrow \text{im}(u') \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \ker(u'') \longrightarrow M'' \longrightarrow \text{im}(u'') \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

il suffit de montrer que F transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.

7.2.6 Exercice. Soit A un anneau et $X = \text{Spec}(A)$. Montrez que le foncteur tilde préserve les sommes directes arbitraires.

Sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, les \mathcal{O}_X -modules qui sont intéressants en géométrie algébrique sont les modules $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ définis par un module sur un anneau. Tous ne sont pas de cette forme :

7.2.7 Exemple. Soit A un anneau de valuation discrète, comme le localisé de \mathbb{Z} en un idéal premier (p) , ou un localisé d'un anneau de polynômes $k[x]$ en un idéal premier (f) , ou l'anneau des entiers p -adiques, ou un anneau de séries formelles à une variable $k[[x]]$ (avec k un corps). L'espace topologique $X = \text{Spec}(A)$ possède deux points, un point fermé correspondant à l'idéal maximal m et un point ouvert η correspondant à l'idéal premier (0) . Notons $U = \{\eta\}$. On définit un sous-faisceau $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ en posant $\mathcal{S}(X) = 0$ et $\mathcal{S}(U) = \mathcal{O}_X(U) = \text{Frac}(A)$. S'il existe un A -module M tel que $\mathcal{S} = \widetilde{M}$, on a $M = \Gamma(X, \widetilde{M}) = \Gamma(X, \mathcal{S}) = 0$ donc $\mathcal{S} = \widetilde{M} = 0$, contradiction.

Or les A -modules vérifient une propriété qui, bien que stupide, se transfère du côté des \mathcal{O}_X -modules en une propriété qui ne l'est pas : ils sont engendrés par leurs éléments. Plus précisément, ils peuvent être définis par générateurs et relations, ce qui signifie que pour tout A -module M il existe une suite exacte :

$$A^{(J)} \longrightarrow A^{(I)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $A^{(I)}, A^{(J)}$ sont les modules libres sur des ensembles de base I, J . Par exemple, si $A = k[x, y]$ et $M = k[x, y]/(f, g)$ où $f, g \in A$ sont deux polynômes, alors M possède la présentation

$$A^2 \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

où u est l'application A -linéaire de matrice $(f \ g) \in M_{1,2}(A)$, c'est-à-dire $u(a, b) = af + bg$ et v est le morphisme de quotient. Une autre manière de le dire est que tout module est conoyau d'un morphisme entre modules libres. Ceci implique que sur $X = \text{Spec}(A)$, le module $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ peut être défini par générateurs et relations. C'est cette propriété qui est à l'origine de la définition des modules quasi-cohérents.

7.2.8 Définition. Soit X un espace annelé. On dit qu'un \mathcal{O}_X -module est *quasi-cohérent* si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U sur lequel $\mathcal{F}|_U$ peut être défini par générateurs et relations, i.e. il existe une suite exacte $\mathcal{O}_U^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$. On note $\text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents.

Le fait que ce soit une bonne notion dans le cadre des schémas sera confirmé par la propriété que sur un schéma affine, tout module quasi-cohérent est de la forme \widetilde{M} . Nous allons démontrer ceci et en même temps quelques compléments.

7.2.9 Théorème. Soient X un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ il existe un A -module M tel que $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$.
- (2) Il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ et des A_i -modules M_i tels que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$.
- (3) Le \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est quasi-cohérent.
- (4) Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ et pour tout $f \in A$, le morphisme $\Gamma(U, \mathcal{F})_f \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Démonstration : D'abord un commentaire sur le point (4) : le morphisme proposé provient du morphisme de restriction $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F})$ via la propriété universelle, puisque clairement l'élément f induit sur le module $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$ un morphisme bijectif. Nous passons à la démonstration.

(1) \Rightarrow (2) est clair.

(2) \Rightarrow (3). Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert affine $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ tel que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$ pour tout i . Soit $\widetilde{A}_i^{(J)} \rightarrow \widetilde{A}_i^{(I)} \rightarrow M_i \rightarrow 0$ une présentation de M_i . Comme le foncteur tilde : $\text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact (proposition 7.2.4) et préserve les sommes directes (exercice 7.2.6), on en déduit que la suite $\mathcal{O}_{U_i}^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow 0$ est exacte, donc \mathcal{F} est quasi-cohérent.

(3) \Rightarrow (4). Si $\mathcal{F}|_U$ est de la forme \widetilde{M} , les deux membres sont égaux à M_f et l'énoncé est clair. Nous utiliserons ce fait ci-dessous. Quitte à changer X en U , on peut supposer $U = X = \text{Spec}(A)$ affine. Par l'hypothèse (3) il existe un recouvrement ouvert par des ouverts (que l'on peut supposer principaux $U_i = D(f_i)$) et des présentations par générateurs et relations :

$$\widetilde{A}_{f_i}^{(J)} \xrightarrow{\widetilde{u}_i} \widetilde{A}_{f_i}^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0.$$

Comme X est quasi-compact, on peut supposer les U_i en nombre fini. Comme le foncteur tilde est pleinement fidèle (prop. 7.2.3), chaque morphisme \tilde{u}_i est défini par un certain morphisme de A_{f_i} -modules $u_i : A_{f_i}^{(J)} \rightarrow A_{f_i}^{(I)}$. Comme tilde préserve les conoyaux (voir 7.2.4), on en déduit que $\mathcal{F}|_{U_i} = \text{coker}(\tilde{u}_i) = \text{coker}(u_i)^\sim$. Compte tenu de notre observation initiale ceci montre que $\mathcal{F}|_{U_i}$ vérifie la propriété (4) attendue. Le même argument montre que les restrictions de \mathcal{F} aux ouverts $U_i \cap U_j = D(f_i f_j)$ vérifient la propriété (4). Nous allons conclure en utilisant la propriété de faisceau. Celle-ci affirme que l'on a une suite exacte $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$. Comme les ensembles d'indices des produits sont *finis*, le morphisme naturel $(\prod \Gamma(U_i, \mathcal{F}))_f \rightarrow \prod \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f$ est un isomorphisme ainsi que son analogue sur les $U_i \cap U_j$. On peut donc localiser en f cette suite exacte, ce qui donne le premier rang du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})_f \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(D(f), \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_i \Gamma(D(f) \cap U_i, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma(D(f) \cap U_i \cap U_j, \mathcal{F})
\end{array}$$

D'après ce que nous avons démontré auparavant, les applications β et γ sont des isomorphismes. L'application α identifie alors $\ker(\beta)$ et $\ker(\gamma)$, d'où (4).

(4) \Rightarrow (1). Posons $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$. La restriction des sections induit un morphisme de \mathcal{O}_U -modules $\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{F}|_U$. La propriété (4) affirme que c'est un isomorphisme sur tous les ouverts principaux $D(f) \subset U$, c'est donc un isomorphisme de faisceaux. \square

7.2.10 Corollaire. *Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. Les foncteurs*

$$\text{Mod}(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{M \mapsto \widetilde{M}} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} \text{Qcoh}(\mathcal{O}_X)$$

sont des équivalences de catégories exactes, quasi-inverses l'une de l'autre.

On renvoie à 4.2.10 pour un rappel sur la notion de quasi-inverse.

Démonstration : Le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est pleinement fidèle par 7.2.3 et essentiellement surjectif par 7.2.9. Il est clair que $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ est un quasi-inverse. Nous avons déjà vu que $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact. Un résultat général de théorie des catégories dit qu'un quasi-inverse d'un foncteur exact est exact, mais démontrons tout de même directement que Γ est exact. Soit donc $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents. Notons $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, etc. On voit directement en utilisant les définitions que la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$ est exacte. Notons $Q = M/M'$, on a donc une injection $Q \hookrightarrow M''$. Montrons que le module $C = M''/Q$ est nul. Pour tout $x = [p] \in X$, la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}'_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x \rightarrow 0$ est exacte. Puisque $\mathcal{F}_x = M_p$ (etc.), ce implique que $Q_p \rightarrow M''_p$ est un isomorphisme, et ceci pour tout p . Alors $C_p = (M''/Q)_p \simeq M''_p/Q_p = 0$ pour tout p . Mais un module C dont tous les localisés C_p sont nuls est nul (car si $x \in C$ est non nul, son annulateur $\text{Ann}(x)$ est un idéal distinct de A , donc inclus dans un idéal maximal p , et x reste non nul dans C_p . Voir [Mat89], th. 4.6). Nous avons montré que $C = 0$, donc $Q \rightarrow M''$ est un isomorphisme et la suite $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est exacte. \square

7.2.11 Corollaire. Soit X un schéma. Alors le noyau, le conoyau, l'image d'un morphisme de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents sont quasi-cohérents.

Démonstration : Ces propriétés sont locales sur X donc on peut supposer que X est affine. Dans ce cas le résultat provient des équivalences de catégories exactes de 7.2.10. \square

7.2.12 Proposition. Soient $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ deux schémas affines et $f : Y \rightarrow X$ le morphisme défini par un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$.

(1) Si N est un B -module, ${}_A N$ est N vu comme A -module via φ , et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, alors $f_* \mathcal{G} = \widetilde{{}_A N}$.

(2) Si M est un A -module et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, alors $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Démonstration : On utilisera librement le fait suivant : si $s \in A$ et $U = D(s) \subset X$ est un ouvert principal, alors $f^{-1}(U) = D(s \cdot 1_B) = D(s)$. On notera parfois $D_X(s) \subset X$ et $D_Y(s) \subset Y$ pour distinguer ces deux objets.

(1) Il suffit de montrer l'égalité des modules de sections sur un ouvert principal $U = D_X(s)$. Or $(f_* \mathcal{G})(D(s)) = \mathcal{G}(f^{-1}(D(s))) = \mathcal{G}(D(s)) = N_s = ({}_A N)_s$ ce qui est licite puisque $s \in A$.

(2) Nous utiliserons le fait suivant, qui est un raffinement de 7.2.3 et que l'on prouve de la même manière : (\star) si $X = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine et \mathcal{F}, \mathcal{G} sont deux faisceaux de \mathcal{O}_X -modules avec $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ quasi-cohérent, alors l'application $\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{G}))$, qui envoie un morphisme de faisceaux φ sur le morphisme $\varphi(X)$, est une bijection (fonctorielle en \mathcal{F} et \mathcal{G}). Revenons aux notations de la proposition. Pour tout \mathcal{O}_Y -module \mathcal{G} , notons $N = \Gamma(Y, \mathcal{G})$ qui est un B -module, et ${}_A N$ qui est N vu comme A -module. On a :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G}) \text{ par adjonction,} \\ &= \text{Hom}_A(M, {}_A N) \text{ d'après } (\star), \\ &= \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \text{ d'après [Mat89], App. A, formula 9 avec } P = B, \\ &= \text{Hom}_A(\widetilde{M \otimes_A B}, \mathcal{G}) \text{ d'après } (\star). \end{aligned}$$

Comme ces égalités sont des isomorphismes fonctoriels en \mathcal{G} , le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme canonique $f^* \mathcal{F} \simeq \widetilde{M \otimes_A B}$. \square

7.2.13 Remarque. On peut essayer de démontrer la formule $f^* \mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$ directement en calculant $f^* \mathcal{F}$ à l'aide des définitions. Hartshorne [Har77, II, Prop. 5.2] dit que c'est immédiat, et je n'en suis pas aussi sûr... Voici comment faire ce calcul par étapes.

Étape 1. Le faisceau $f^* \mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau défini par :

$$\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V)$$

où apparaît la composée $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{f^\#} \mathcal{O}_Y(f^{-1}U) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_Y(V)$. En effet, on dispose d'un morphisme naturel $\mathcal{P} \rightarrow f^*\mathcal{F}$ qui est un isomorphisme sur les fibres en $y \in Y$, toutes deux naturellement isomorphes à $\mathcal{F}_{f(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,f(y)}} \mathcal{O}_{Y,y}$, voir 5.5.7. Dans la suite on pose $\mathcal{H} = \widetilde{M \otimes_A B}$.

Étape 2. Il suffit de construire un isomorphisme de \mathcal{B} -préfaisceaux $\mathcal{P} \simeq \mathcal{H}$ i.e. des isomorphismes $\mathcal{P}(V) \simeq \mathcal{H}(V)$ fonctoriels en l'ouvert principal $V = D(s)$, $s \in B$. En effet, si on dispose d'un tel isomorphisme, alors \mathcal{P} est un \mathcal{B} -faisceau donc le faisceau qui lui est associé est égal à \mathcal{H} .

Étape 3. Dans le calcul de la limite inductive qui définit $\mathcal{P}(V)$ avec V principal, nous pouvons nous limiter aux ouverts U qui sont quasi-compacts, i.e. réunions finies $U = D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ avec $s_1, \dots, s_r \in A$. En effet, il est équivalent de dire que $U \supset f(V)$ ou que $f^{-1}(U) \supset V$. En recouvrant U par des ouverts principaux $D(s_i)$ et en utilisant la quasi-compacité de V , on voit que U contient un ouvert quasi-compact $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ qui recouvre $f(V)$. Dans la suite, pour tout uplet $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$, nous noterons $D(\underline{s}) := D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ et $M_{\underline{s}} := \mathcal{F}(D(\underline{s})) = \ker(\prod_i M_{s_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} M_{s_i s_j})$. On prendra garde au fait que $D(\underline{s})$ n'est pas nécessairement principal.

Étape 4. Pour tout ouvert quasi-compact $U = D(\underline{s}) \supset f(V)$ où $V = D(t)$, on a :

$$\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) = (M \otimes_A B)_t.$$

En effet, $U \supset f(V) \iff f^{-1}(U) \supset V \iff D(t) \subset f^{-1}(D(\underline{s})) = D(\underline{s} \cdot 1_B) \iff V(s_1, \dots, s_r) \subset V(t)$ où la dernière équivalence est obtenue par passage au complémentaire. Ceci est équivalent à dire que $t \in \sqrt{J}$ où $J := s_1 B + \dots + s_r B$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t^N \in J$. On voit qu'en passant au localisé B_t , les s_i engendrent l'idéal unité de B_t . En considérant une partition de l'unité associée, on voit comme dans la preuve de 6.1.5 que le morphisme $M \otimes_A B_t \rightarrow M_{\underline{s}} \otimes_{A_{\underline{s}}} B_t$ induit par le morphisme $M \rightarrow M_{\underline{s}}$ est un isomorphisme. Comme $M \otimes_A B_t = (M \otimes_A B)_t$, on obtient le résultat annoncé.

Étape 5. On peut conclure le calcul :

$$\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U=D(\underline{s}) \supset f(V)} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) = \varinjlim_{U=D(\underline{s}) \supset f(V)} (M \otimes_A B)_t = (M \otimes_A B)_t = \mathcal{H}(V).$$

Une dernière méthode est possible pour établir la formule $f^*\mathcal{F} = \widetilde{M \otimes_A B}$. Nous la donnons dans l'exercice 7.2.16 après deux exercices préliminaires.

7.2.14 Exercice. Soient $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine, M un A -module, \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_X -modules.

(1) Démontrer que le foncteur de sections globales $\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ est une bijection fonctorielle en M et \mathcal{F} . (*Indication : adapter la preuve de la prop. 4.2.2 du cours.*)

(2) Déduisez-en que le foncteur $i : \text{Qcoh}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ d'inclusion de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents comme sous-catégorie pleine de la catégorie de tous les \mathcal{O}_X -modules possède un adjoint à droite, donné par le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$.

7.2.15 Exercice. Soient X un espace annelé et \mathcal{F}, \mathcal{G} deux faisceaux de \mathcal{O}_X -modules. Soit $x \in X$ un point. Montrez qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$ -modules $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$.

(*Indications.* (i) Pour construire ce morphisme, prenez les germes dans l'application bilinéaire universelle $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. (ii) Le produit tensoriel commute aux limites inductives, voir [Mat89], Appendice A, Th. A1.)

7.2.16 Exercice. Soient $f : Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ un morphisme de schémas affines, M un A -module, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$.

(1) En partant du morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ et en prenant les sections globales, construisez un morphisme $M \otimes_A B \rightarrow \Gamma(Y, f^* \mathcal{F})$.

(2) En utilisant l'exercice 7.2.14, déduisez-en un morphisme $\varphi : \widetilde{M \otimes_A B} \rightarrow f^* \mathcal{F}$.

(3) En utilisant l'exercice 7.2.15, montrez que φ est un isomorphisme sur les fibres en tous les points $x \in X$, donc un isomorphisme de faisceaux.

7.3 Idéaux quasi-cohérents, sous-schémas

Nous passons maintenant à la définition des sous-schémas fermés. Cette définition doit satisfaire la contrainte naturelle suivante : si $X = \text{Spec}(A)$, les sous-schémas fermés sont les schémas de la forme $V(I) = \text{Spec}(A/I)$, associés aux idéaux $I \subset A$. On veut que des idéaux différents donnent lieu à des sous-schémas différents, pour pouvoir (par exemple) distinguer dans le plan affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$: d'une part l'origine $\{0\}$ définie par l'idéal (x, y) et d'autre part l'intersection schématique de la parabole $\{y = x^2\}$ avec la droite $\{y = 0\}$, définie par l'idéal (y, x^2) . Voici la notion « globale ».

7.3.1 Définition. Soit X un schéma. On appelle *idéal quasi-cohérent sur X* un sous- \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent de \mathcal{O}_X .

7.3.2 Lemme. Soit X un schéma et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal quasi-cohérent de \mathcal{O}_X . Notons :

$$Y = \{x \in X ; \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \text{ muni de la topologie induite de celle de } X, \text{ et}$$

$$\mathcal{O}_Y = i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \text{ où } i : Y \rightarrow X \text{ est l'inclusion.}$$

Alors Y est fermé dans X et (Y, \mathcal{O}_Y) est un schéma que l'on note $V(\mathcal{I})$. Si $X = \text{Spec}(A)$ et $\mathcal{I} = \widetilde{I}$, alors $(Y, \mathcal{O}_Y) = \text{Spec}(A/I)$.

Démonstration : Les assertions à démontrer sont locales sur X , donc quitte à se restreindre à un ouvert affine on peut supposer que X est affine. En d'autres termes, seule la dernière phrase est à démontrer. On a $Y = \{x = [p] ; I_p \neq A_p\} = \{x = [p] ; I_p \subset pA_p\} = \{x = [p] ; I \subset p\}$ qui est égal au fermé $V(I)$ comme sous-espace de X . Sur ce fermé, notons $\mathcal{Q}_Y = \widetilde{A/I}$ le faisceau de \mathcal{O}_Y -modules obtenu par l'opération tilde sur $Y = \text{Spec}(A/I)$. Notons $\mathcal{Q}_X = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ qui est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules. D'après 7.2.10 et 7.2.11, le faisceau \mathcal{Q}_X est quasi-cohérent, égal à au faisceau $\widetilde{A/I}$ obtenu par l'opération tilde sur $X = \text{Spec}(A)$. (Ici A/I est vu comme A -module.) Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $i^{-1}\mathcal{Q}_X = \mathcal{Q}_Y$. La stratégie est semblable à celle de la remarque 7.2.13.

Étape 1. Le faisceau $i^{-1}\mathcal{Q}_X$ est associé au préfaisceau \mathcal{P} défini par $\mathcal{P}(V) = \varinjlim_{U \supset V} \mathcal{Q}_X(U)$ pour V ouvert de Y , où la limite est sur les ouverts U de X contenant V .

Étape 2. Il suffit de démontrer que $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{Q}_Y(Y)$. En effet, on sait qu'il suffit de montrer que $\mathcal{P}(V) = \mathcal{Q}_Y(V)$ pour tous les ouverts principaux $V \subset Y$, car dans ce cas \mathcal{P} est un \mathcal{B} -faisceau de faisceau associé \mathcal{Q}_Y , comme souhaité. Or un ouvert principal de Y est de la forme $V = D_Y(g) = \text{Spec}((A/I)_g)$ où l'on identifie un élément $g \in A$ et son image dans A/I . Comme $(A/I)_g = A_g/I_g$, on voit que quitte à remplacer X par $X' = D_X(g)$ et Y par $Y' = D_Y(g) = Y \cap D_X(g)$, on se ramène à démontrer que $\mathcal{P}(V) = \mathcal{Q}_Y(V)$ lorsque $V = Y$.

Étape 3. On peut se limiter dans la limite inductive aux ouverts quasi-compacts $U = D(\underline{s}) := D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ avec $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ un uplet d'éléments de A . En effet, on peut toujours recouvrir un ouvert $U \supset Y$ par des ouverts principaux $D(s_i)$ et en utilisant la quasi-compacité de Y , on voit que U contient un ouvert quasi-compact $D(s_1) \cup \dots \cup D(s_r)$ qui recouvre Y .

Étape 4. Fin du calcul. On observe que $D(\underline{s}) \supset Y$ si et seulement si $D(\underline{s} \cdot 1_{A/I}) = D(\underline{s}) \cap Y = Y$ ce qui signifie que l'idéal engendré par \underline{s} dans A/I est l'idéal unité. En utilisant une partition de l'unité pour les s_i dans A/I , on montre comme dans la preuve de 6.1.5 que le morphisme $A/I \rightarrow \mathcal{Q}_X(D(\underline{s})) = \ker(\prod_i (A/I)_{s_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} (A/I)_{s_i s_j})$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}(Y) = \varinjlim_{D(\underline{s}) \supset Y} \mathcal{Q}_X(D(\underline{s})) = \varinjlim_{D(\underline{s}) \supset Y} A/I = A/I = \mathcal{Q}_Y(Y).$$

On a terminé. □

7.3.3 Définition. On appelle *sous-schéma fermé* de X le schéma $V(\mathcal{I})$ défini par un idéal quasi-cohérent \mathcal{I} dans le lemme précédent. Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma fermé dans X .

7.3.4 Définition. Un *sous-schéma* de X est un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert de X . La terminologie *sous-schéma localement fermé* est parfois utilisée aussi. Une *immersion* est un morphisme de schémas $f : X' \rightarrow X$ qui se factorise en

$$X' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

où g est un isomorphisme et i est l'inclusion d'un sous-schéma Z dans X .

7.3.5 Exercice. Montrez qu'un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé de X est un sous-schéma de X . Déduisez-en qu'un sous-schéma d'un sous-schéma de X est un sous-schéma de X , et que la composée de deux immersions est une immersion. *Commentaire* : très souvent, un sous-schéma fermé d'un sous-schéma ouvert est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé, mais il existe des exemples (un peu pathologiques) où ce n'est pas le cas (et la lectrice curieuse peut trouver un exemple ici). C'est pour cela que la définition de sous-schéma est ainsi faite.

7.3.6 Exercice. Montrez qu'une immersion est un monomorphisme de schémas. (Traitez séparément les immersions fermées et les immersions ouvertes.)

7.3.7 Sous-schémas de support donné. Nous avons vu qu'un sous-schéma ouvert $U \subset X$ est déterminé par son support. La situation est très différente pour les sous-schémas fermés $Y \subset X$. Plus précisément, dans le cas affine on a les conditions équivalentes :

- (1) $Y = V(I) = V(J)$ ensemblistement,
- (2) pour $p \subset A$ premier, $p \supset I \iff p \supset J$,
- (3) $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

En revanche, l'égalité des *sous-schémas* $Y = V(I)$ et $Z = V(J)$ implique :

$$I = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) = J.$$

(Notez qu'un morphisme de schémas $f : V \rightarrow W$ induit un morphisme d'anneaux $\Gamma(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ obtenu en prenant les sections globales dans le comorphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_W \rightarrow f_*\mathcal{O}_V$.) En particulier, les idéaux I^n pour $n \geq 1$ définissent des sous-schémas fermés de même support ; il en va de même pour deux idéaux I, J tels que $I^n \subset J \subset I^m$ pour $m, n \geq 1$. Ceci est lié au fait que si d'une fonction régulière $f \in A$ on ne se souvient que de ses valeurs $\{f(x) \in \kappa(x), x \in X\}$, alors l'annulation des $f(x)^n$ est équivalente à celle des $f(x)^m$. La fonction elle-même, information plus subtile que la collection de ses valeurs, diffère.

7.3.8 Exercice. Soit $X = \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ la droite affine sur un corps et $x = \{t = 0\}$ l'origine. Trouvez tous les sous-schémas fermés de support $\{x\}$. Pour chaque tel sous-schéma $i : Y \hookrightarrow X$, et chaque fonction $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, décrivez ce que signifie l'annulation de f sur Y .

7.3.9 Exercice. (1) Dans un espace topologique X , soit Z une partie localement fermée i.e. une partie qui est intersection d'un ouvert et d'un fermé. On considère l'ensemble \mathcal{E} des paires composées d'un fermé F et d'un ouvert U tels que $Z = F \cap U$.

- (i) Montrez que l'adhérence $F_{\min} = \overline{Z}$ est le plus petit fermé F qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (ii) Montrez que la frontière $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ est fermée dans X et que $U_{\max} = X \setminus \partial Z$ est le plus grand ouvert U qui appartient à une paire $(F, U) \in \mathcal{E}$.
- (iii) Montrez que pour tout $(F, U) \in \mathcal{E}$ on a $Z = F \cap U = F_{\min} \cap U = F \cap U_{\max}$. En particulier (F_{\min}, U_{\max}) appartient à \mathcal{E} .

(2) Soit $Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma et $f : Z \rightarrow X$ le morphisme d'immersion. Soit $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z$ et $U = X \setminus \partial Z$. Montrez que Z est un sous-schéma fermé de U . Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) f est une immersion fermée, (ii) $U = X$, (iii) $|Z|$ est fermé dans $|X|$.

7.4 Algèbres quasi-cohérentes

7.4.1 Définition. Soit S un schéma. On appelle *faisceau d'algèbres sur S* ou \mathcal{O}_S -algèbre un faisceau d'anneaux \mathcal{A} sur S muni d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{A}$. On appelle \mathcal{O}_S -algèbre *quasi-cohérente* un faisceau d'algèbres qui est quasi-cohérent comme faisceau de modules.

Par exemple, si $f : X \rightarrow S$ est un S -schéma, alors $\mathcal{A}(X) := f_*\mathcal{O}_X$ est naturellement une \mathcal{O}_S -algèbre à l'aide du morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_S \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$. De plus, si $g : Y \rightarrow S$ est un second S -schéma et $h : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, le morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow h_*\mathcal{O}_X$ fournit par application de g_* un morphisme $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$. On obtient ainsi un foncteur contravariant $\mathcal{A} : \text{Sch}/S \rightarrow \{\mathcal{O}_S\text{-algèbres}\}$. On peut montrer que sous des conditions assez faibles sur f (par ex. quasi-compacité plus séparation), l'algèbre $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente. Ce résultat implique par exemple que si X est un sous-schéma fermé d'un espace affine \mathbb{A}_S^n ou d'un espace projectif \mathbb{P}_S^n , alors $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente.

7.4.2 Exercice. Montrez que sur un schéma affine $X = \text{Spec}(A)$, le produit tensoriel de deux modules quasi-cohérents $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ est le module $\widetilde{M \otimes_A N}$. Dédisez-en que $B \mapsto \widetilde{B}$ définit une équivalence entre la catégorie des A -algèbres et la catégorie des \mathcal{O}_X -algèbres quasi-cohérentes.

7.4.3 Proposition. Soit \mathcal{A} une algèbre quasi-cohérente sur S . Alors il existe un S -schéma $Y = \text{Spec}(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{A}$ avec la propriété universelle suivante : le foncteur \mathcal{A} induit une bijection

$$\text{Hom}_S(X, \text{Spec}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X))$$

fonctorielle en X et en \mathcal{A} .

Démonstration : Si $S = \text{Spec}(R)$ est affine, on a $\mathcal{A} = \tilde{A}$ pour une certaine R -algèbre A . Dans ce cas on pose $Y = \text{Spec}(A)$ et le résultat se déduit facilement de 6.5.2. Dans le cas général, on peut recouvrir S par des ouverts affines $U_i = \text{Spec}(R_i)$, on a $\mathcal{A}|_{U_i} = \tilde{A}_i$ pour une certaine R_i -algèbre A_i et on pose $Y_i = \text{Spec}(A_i)$. L'ouvert $Y_{i,j}$ préimage de $U_i \cap U_j$ dans Y_i vérifie la propriété universelle du schéma $\text{Spec}(\mathcal{A}|_{U_i \cap U_j})$. Par symétrie il en va de même de $Y_{j,i}$ et on a donc un isomorphisme canonique $\varphi_{i,j} : Y_{i,j} \xrightarrow{\sim} Y_{j,i}$. On note Y le S -schéma obtenu par recollement des Y_i le long des $Y_{i,j}$. La vérification de la propriété universelle est immédiate car la bijection annoncée peut se tester localement : plus précisément, si l'on note α, β les deux applications en sens inverses entre les deux ensembles Hom , on peut tester les égalités $\alpha(\beta(f)) = f$ et $\beta(\alpha(g)) = g$ localement sur chaque U_i . \square

7.4.4 Définition. Le S -schéma $\text{Spec}(\mathcal{A})$, aussi noté parfois $\text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A})$, est appelé *spectre relatif* de l'algèbre quasi-cohérente \mathcal{A} .

7.4.5 Remarque. La formation de $\text{Spec}(\mathcal{A})$ commute au changement de base sur S , au sens où pour tout morphisme de schémas $u : S' \rightarrow S$ il existe un isomorphisme canonique de S' -schémas

$$\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S' \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(u^* \mathcal{A}).$$

En effet, pour montrer cela il suffit de montrer que les S' -schémas $\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'$ et $\text{Spec}(u^* \mathcal{A})$ sont solution du même problème universel. (C'est une manière de voir le lemme de Yoneda.) Or pour tout S' -schéma $f' : X' \rightarrow S'$ on a des bijections canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(u^* \mathcal{A})) &= \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathcal{O}_{S'})}(u^* \mathcal{A}, \mathcal{A}'(X')) \\ &= \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{A}, u_* \mathcal{A}'(X')) \text{ par adjonction,} \\ &= \text{Hom}_{\text{Alg}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{A}, \mathcal{A}(X')) \text{ en posant } f = u \circ f' : X' \rightarrow S, \\ &= \text{Hom}_S(X', \text{Spec}(\mathcal{A})) \\ &= \text{Hom}_{S'}(X', \text{Spec}(\mathcal{A}) \times_S S'). \end{aligned}$$

Ceci conclut l'argument.

7.4.6 Exercice (exemple 1). Soit X un schéma et \mathcal{I} un idéal quasi-cohérent. On veut montrer que le sous-schéma fermé $V(\mathcal{I})$ est isomorphe à $\text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

(1) En utilisant la propriété universelle de $\text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ (prop. 7.4.3), construisez un morphisme de X -schémas $f : V(\mathcal{I}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

(2) On note $Y = V(\mathcal{I})$ et $i : Y \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Démontrez que le morphisme $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} i_* \mathcal{O}_Y$. Déduisez-en que f est un isomorphisme.

7.4.7 Exercice (exemple 2). Soit S un schéma. Définissez la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes en t_1, \dots, t_n et montrez que son spectre est l'espace affine \mathbb{A}_S^n . Pour tout r -uplet de sections globales $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$, expliquez comment définir une algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$. Décrivez la propriété universelle du S -schéma $\mu_{n,S} := \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t]/(t^n - 1))$.

7.4.8 Fibrés vectoriels (exemple 3). On renvoie à [Ei95], Annexe 2, pour des rappels sur l'algèbre symétrique. Soit R un anneau et M un R -module. On note $M^{\otimes n}$ la n -ième puissance tensorielle de M . On appelle *algèbre tensorielle de M* la R -algèbre graduée $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$ où $T^n(M) = M^{\otimes n}$, le produit dans $T(M)$ étant défini par $(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)(y_1 \otimes \dots \otimes y_s) = x_1 \otimes \dots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_s$. On appelle *algèbre symétrique de M* l'algèbre graduée $\text{Sym}(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(M)$ quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par les relations $x \otimes y - y \otimes x$ avec $x, y \in M$. C'est la plus grande algèbre quotient de $T(M)$ qui soit commutative. Le R -module $\text{Sym}^n(M)$ est l'image de $T^n(M)$; on a :

$$\begin{aligned} \text{Sym}^0(M) &= T^0(M) = R, \\ \text{Sym}^1(M) &= T^1(M) = M, \\ \text{Sym}^2(M) &= T^2(M)/(x \otimes y - y \otimes x; x, y \in M). \end{aligned}$$

L'algèbre $\text{Sym}(M)$ est graduée avec $\text{Sym}^n(M)$ égal à l'image de $T^n(M)$. On dispose d'un morphisme de R -modules injectif $i : M = \text{Sym}^1(M) \hookrightarrow \text{Sym}(M)$. De plus $S(M)$ vérifie la propriété universelle suivante : l'application qui à un morphisme de R -algèbres $\varphi : \text{Sym}(M) \rightarrow A$ associe sa restriction $\varphi \circ i : M \rightarrow A$ est une bijection $\text{Hom}_{\text{Alg}(R)}(\text{Sym}(M), R) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Mod}(R)}(M, A)$ fonctorielle en M et A . Une autre manière de le dire est que le foncteur S est adjoint à gauche du foncteur d'oubli, qui à A associe le module sous-jacent, de la catégorie des R -algèbres commutatives dans la catégorie des R -modules.

7.4.9 Exemple. Si M est libre de rang n avec pour base t_1, \dots, t_n , alors $T(M) = R\{t_1, \dots, t_n\}$ est l'algèbre des polynômes non commutatifs en les t_i et $\text{Sym}(M) = R[t_1, \dots, t_n]$ est l'algèbre des polynômes commutatifs en les t_i . Le morphisme $M \hookrightarrow \text{Sym}(M)$ identifie M aux polynômes homogènes de degré 1. On retrouve la propriété universelle des anneaux de polynômes.

Si S est un espace annelé et \mathcal{F} est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules, on peut définir le faisceau *algèbre symétrique* $\text{Sym}(\mathcal{F})$ en suivant la construction précédente et en faisceautisant aux endroits où c'est nécessaire. Pour tout faisceau de \mathcal{O}_S -algèbres \mathcal{A} , on a une bijection :

$$\text{Hom}_{\text{Alg}(\mathcal{O}_S)}(\text{Sym}(\mathcal{F}), \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F}, \mathcal{A}).$$

On peut vérifier que si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent, alors son algèbre symétrique $\text{Sym}(\mathcal{F})$ est une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente. Nous allons voir que le S -schéma $\mathbb{V}(\mathcal{F}) := \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{F}))$ vérifie une propriété universelle très simple. Cette propriété mettra en jeu le \mathcal{O}_S -module *dual* de \mathcal{F} , qui est défini par $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\text{Mod}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$.

7.4.10 Proposition. Soient S un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent. Pour tout S -schéma $f : T \rightarrow S$, on pose $\mathcal{F}_T = f^*\mathcal{F}$. On a une bijection, fonctorielle en T/S et \mathcal{F} :

$$\text{Hom}_S(T, \mathbb{V}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee).$$

Démonstration : On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{V}(\mathcal{F})) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_S)}(\mathrm{Sym}(\mathcal{F}), f_*\mathcal{O}_T) \text{ par la propriété universelle du spectre, voir 7.4.3,} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{O}_T) \text{ par la propriété universelle de l'algèbre symétrique,} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_T)}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{O}_T) \text{ par adjonction,} \\
&= \Gamma(T, (\mathcal{F}_T)^\vee) \text{ par définition du dual.}
\end{aligned}$$

□

7.4.11 Définition. Soit X un schéma et r un entier. On dit qu'un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est *localement libre de rang r* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i et des isomorphismes $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. Le \mathcal{O}_X -module localement libre $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ est appelé *trivial* et on dit qu'un ouvert U_i comme ci-dessus *trivialise* \mathcal{F} . Un X -schéma de la forme $V(\mathcal{F})$ avec \mathcal{F} localement libre de rang r est appelé *fibré vectoriel de rang r* . Lorsque $r = 1$ on parle aussi de *fibré en droites*.

L'exemple 7.4.9 montre que pour un fibré vectoriel de rang r sur X , il existe un recouvrement par des ouverts U tels que $V \times_X U \simeq \mathbb{A}_U^r$. Les ouvrages [Har77] (chap. 2, exercice 5.18) et [GW20] (chapitre 11) expliquent comment cette définition des fibrés vectoriels est équivalente à la définition plus géométrique utilisée en géométrie et topologie différentielles.

7.4.12 Exercice. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang r sur un schéma X . Montrez que le dual $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$ est encore localement libre de rang r .

7.4.13 Exemple. Soit $f : X \rightarrow S$ un S -schéma. Pour tout ouvert $U \subset X$, notons $\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des \mathcal{O}_S -dérivations de $\mathcal{O}_X(U)$ i.e. l'ensemble des morphismes de groupes abéliens $D : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ telles que $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ pour tous $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ et $D(af) = aD(f)$ pour toute fonction $a \in \mathcal{O}_S(V)$ définie sur un ouvert V contenant $f(U)$. Alors \mathcal{D} est un faisceau appelé le *faisceau des \mathcal{O}_S -dérivations de X/S* . Si X/S est de type fini alors \mathcal{D} est de type fini comme \mathcal{O}_X -module, et si de plus X/S est lisse de dimension relative r alors \mathcal{D} est localement libre de rang r . Le fibré vectoriel $\mathbb{T}_{X/S} = \mathbb{V}(\mathcal{D}^\vee) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{D}^\vee))$ est appelé *fibré tangent de X/S* .

7.5 Faisceaux inversibles

Nous avons vu en 7.1 les notions générales de produit tensoriel et de faisceau $\mathcal{H}om$ pour les \mathcal{O}_X -modules. Nous ajoutons la définition du \mathcal{O}_X -module *dual* : il s'agit du faisceau $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

7.5.1 Lemme. Soient X un espace annelé et \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1. Alors, le morphisme canonique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{O}_X \\
\varphi \otimes s &\longmapsto \varphi(s)
\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Il suffit de montrer que ce morphisme est un isomorphisme sur un recouvrement ouvert de X . Soit U un ouvert qui trivialise \mathcal{L} , donc il existe un isomorphisme $u : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U$. Notons $(u^\vee)^{-1} : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U^\vee$ l'isomorphisme obtenu en dualisant. Utilisant ces isomorphismes, le morphisme $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$ se réduit à l'isomorphisme $\mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$, $s \otimes t \mapsto st$. □

7.5.2 Définition. Un faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{L} est appelé *faisceau inversible* s'il est localement libre de rang 1. Son *inverse* ou *dual* est le faisceau $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Le faisceau inversible trivial est le faisceau $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Le *groupe de Picard* de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur X , pointé par la classe d'isomorphisme du faisceau inversible trivial et muni de l'opération de produit tensoriel. Il est noté $\text{Pic}(X)$.

7.5.3 Remarque. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés, l'image inverse induit un morphisme de groupes $f^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$. En revanche, en général l'image directe $f_*\mathcal{L}$ d'un faisceau inversible n'est pas un faisceau inversible. Par exemple, pour un schéma X sur un corps k , l'image directe de \mathcal{O}_X par $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ est l'espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ qui est de dimension > 1 en général.

7.5.4 Exemple (retour sur l'espace projectif). Soit $P = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ l'espace projectif sur \mathbb{Z} . Soient $A_i = \mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i]$ et $A_{i,j} = A_i[t_i/t_j] = A_j[t_j/t_i] = A_{j,i}$. Fixons un entier d . Sur l'ouvert $P_i = \text{Spec}(A_i)$, on définit un faisceau inversible $\mathcal{F}_i = \widetilde{M}_i$ en posant $M_i = (t_i)^d A_i$, sous- A_i -module de $K = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, (t_0 \dots t_n)^{-1}]$. Si l'on affecte chaque t_i du poids 1, on voit que M_i est composé des éléments homogènes de degré d dans $\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n, (t_i)^{-1}]$. Sur les intersections $P_{i,j}$, on dispose d'isomorphismes $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_i|_{P_{i,j}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{P_{i,j}}$ donnés par la multiplication par $(t_j/t_i)^d$:

$$\begin{aligned} M_i &\longrightarrow M_j \\ x = (t_i)^d a &\longmapsto \left(\frac{t_j}{t_i}\right)^d x = (t_j)^d a. \end{aligned}$$

Les conditions de recollement sont satisfaites par les $\varphi_{i,j}$ (tout se vérifie dans K où c'est clair). On note $\mathcal{O}(d)$ le faisceau inversible obtenu en recollant les \mathcal{F}_i le long des $\varphi_{i,j}$. En particulier $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_P$. Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est appelé *faisceau tordu de Serre*. On a les faits suivants :

- (1) $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(n+m)$ i.e. l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(P)$, $n \mapsto [\mathcal{O}(n)]$ est un morphisme de groupes.
- (2) $\Gamma(P, \mathcal{O}(d)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]_d, & \text{le module des polynômes homogènes de degré } d \text{ si } d \geq 0, \\ 0 & \text{si } d < 0. \end{cases}$

(À suivre.)

Il est important de noter que dans la construction de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$, seuls les quotients t_i/t_j interviennent. Ceci a pour conséquence que l'objet important est le uplet (t_0, \dots, t_n) à *multiplication scalaire simultanée par un élément de $\Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n})^\times$ près*. On note $(t_0 : \dots : t_n)$ cette classe d'équivalence et on l'appelle *système de coordonnées homogènes canonique* de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. De même que l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ vient par construction avec des coordonnées canoniques (t_1, \dots, t_n) , l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ vient avec ces coordonnées homogènes. Dans les deux cas, ces coordonnées sont des sections d'un certain fibré en droites : le fibré trivial $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ dans le cas de l'espace affine, et le fibré $\mathcal{O}(1)$ dans le cas de l'espace projectif. Si on préfère, on peut voir ces sections de fibrés comme des morphismes de schémas en utilisant la proposition 7.4.10 qui implique que les sections du \mathcal{O}_S -module \mathcal{F} correspondent aux sections du morphisme $\mathbb{V}(\mathcal{F}^\vee) \rightarrow S$. Ainsi les coordonnées de \mathbb{A}^n sont-elles des morphismes $\mathbb{A}^n \rightarrow \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})) = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n$, et les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n des morphismes $\mathbb{P}^n \rightarrow \text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{O}(1)^\vee))$.

7.5.5 Définition. Soient X un espace annelé, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module, et $(s_i)_{i \in I}$ une famille de sections globales de \mathcal{F} . On dit que \mathcal{F} est *engendré par les s_i* si le morphisme naturel $\varphi : \mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$, $\varphi(U)((a_i)_{i \in I}) = \sum a_i s_{i|U}$ est surjectif.

En particulier, il résulte de ce qui précède que le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ est engendré par les sections t_0, \dots, t_n puisque t_i engendre $\mathcal{O}(1)|_{P_i}$. On obtient donc un morphisme surjectif :

$$\phi : \mathcal{O}_P^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}(1).$$

Lorsqu'on change les coordonnées homogènes t_i en $u_i = \lambda t_i$ pour un $\lambda \in \Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathbb{Z}})^\times$, le morphisme ϕ est multiplié par λ . C'est pourquoi dans la propriété universelle ci-dessous, c'est la classe de ϕ modulo les scalaires inversibles qui apparaît.

7.5.6 Théorème. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ un morphisme de \mathbb{Z} -schémas. Alors $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ est un faisceau inversible sur X et $\psi = f^*\phi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme surjectif de \mathcal{O}_X -modules. De plus, l'application $f \mapsto (\mathcal{L}, \psi)$ induit une bijection fonctorielle en X :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}, \psi) \text{ avec } \mathcal{L} \text{ faisceau inversible sur } X \text{ et} \\ \psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{L} \text{ surjection de } \mathcal{O}_X\text{-modules} \end{array} \right\} / \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de montrer comment on construit une application en sens inverse, et renverrons à [EH00], III.2.5 ou [GW20], 13.33 pour une preuve complète. Soit (\mathcal{L}, ψ) un couple composé d'un faisceau inversible sur X et d'une surjection $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$. Soit s_i l'image par ψ du i -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. Notons $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ et pour chaque i posons

$$X_i = \{x \in X, (s_i)_x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(x)\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des points x tels que s_i est un générateur de $\mathcal{L}(x)$, et aussi de \mathcal{L}_x , et donc (par Nakayama) de $\mathcal{L}|_U$ sur un petit voisinage ouvert U de x . On montre que X_i est un ouvert, et le fait que les sections s_i engendrent \mathcal{L} montre que les X_i recouvrent X . De plus, pour tous $j \neq i$, sur tout ouvert $U \subset X_i$ sur lequel \mathcal{L} est trivial, on peut écrire $s_j = f_{i,j,U} s_i$ pour une certaine fonction $f_{i,j,U} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Cette fonction est uniquement déterminée ; les $f_{i,j,U}$ se recollent en une fonction $f_{i,j}$ sur X_i . L'application $\mathbb{Z}[t_0/t_i, \dots, t_n/t_i] \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ qui envoie t_j/t_i sur $f_{i,j}$ définit un morphisme $f_i : U_i \rightarrow X_i$ où U_i est le i -ième ouvert standard de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. Les morphismes f_i se recollent en $f_{\mathbb{Z}} : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ qui détermine à son tour un unique S -morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$. \square

7.5.7 Remarques. (1) On définit le S -espace projectif de dimension n par $\mathbb{P}_S^n := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times S$. Il vérifie une propriété universelle dans la catégorie des S -schémas analogue à la propriété universelle $\mathbb{P}^n \mathbb{Z}$ dans la catégorie des \mathbb{Z} -schémas.

(2) Si E est un k -espace vectoriel de dimension finie, on a une bijection entre l'ensemble des hyperplans $F \subset E$ et l'ensemble des classes d'équivalence de surjections $u : E \rightarrow G$ où $\dim_k(G) = 1$, pour la relation $u \sim v$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v = \lambda u$. Utilisant la variante faisceautique de ces faits, on montre que $\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \text{ localement facteur direct de rang } n\}$. Les \mathcal{H} qui apparaissent ici correspondent à ce qu'il faut appeler des « hyperplans » de $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$. On retrouve le fait que l'espace projectif classe les hyperplans (ou, c'est la même chose par dualité, les droites) d'un espace vectoriel.

(3) Proposons une reformulation de la propriété universelle. La première phrase du théorème implique que pour tout morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$, le faisceau $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$ est inversible et engendré par les sections $s_i = f^*(t_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. (Pour tout morphisme $f : Y \rightarrow X$ et tout faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} , on note $f^*(t)$ l'image d'une section locale t de \mathcal{F} par le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow f_*f^*\mathcal{F}$.) De plus, si les t_i sont multipliées simultanément par une fonction inversible $\lambda \in \Gamma(\mathbb{P}_S^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S^n})^\times$, alors les s_i sont multipliées simultanément par la fonction inversible $f^\#(\lambda) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$. Ceci démontre que la classe $\underline{s} = (s_0 : \dots : s_n)$ pour la relation induite par la multiplication scalaire diagonale par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$, ne dépend que de la classe $\underline{t} = (t_0 : \dots : t_n)$, c'est-à-dire du système de coordonnées homogènes canonique. Il est naturel d'appeler un couple $(\mathcal{L}, \underline{s})$ composé d'un faisceau inversible et d'un uplet de sections globales qui l'engendrent, à multiplication par $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ près, un *système de fonctions homogènes sur X* . Alors, le théorème se réécrit comme une bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{P}_S^n) \xrightarrow{\sim} \{ \text{systèmes } (\mathcal{L}, \underline{s}) \text{ de } n+1 \text{ fonctions homogènes sur } X \}.$$

Un système de fonctions homogènes sur X ne mérite le nom de *coordonnées* que s'il permet de repérer les points de manière aussi précise que ce qu'on attend habituellement de coordonnées. C'est le cas notamment lorsque le morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ déterminé par $(\mathcal{L}, \underline{s})$ est une immersion. En géométrie algébrique projective, l'une des principales tâches est justement de trouver quand cette situation favorable se produit.

7.5.8 Remarque. Il est instructif de décrire le cas particulier des morphismes $X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$ lorsque X est un schéma local, car il est très proche de la description classique des points de l'espace projectif. Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, un morphisme surjectif $\psi : \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{L}$ est déterminé par un morphisme surjectif de A -modules $A^{\oplus n+1} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$. Celui-ci est à son tour déterminé par les $n+1$ images ℓ_0, \dots, ℓ_n des éléments de la base canonique de $A^{\oplus n+1}$. Si de plus A est un anneau local, alors le seul ouvert de X contenant le point fermé est X lui-même, si bien que tout faisceau inversible est trivial. On a donc un isomorphisme $\Gamma(X, \mathcal{L}) \simeq A$ et notant t un générateur de $\Gamma(X, \mathcal{L})$, on peut écrire $\ell_i = a_i t$ avec $a_i \in A$. On observe que la classe $(a_0 : \dots : a_n)$ pour l'homothétie par A^\times ne dépend pas du choix du générateur. Enfin, le fait que ψ soit surjectif signifie qu'au moins un des a_i est inversible, donc les points de \mathbb{P}_S^n à valeurs dans A sont en bijection avec les « coordonnées homogènes » usuelles $(a_0 : \dots : a_n)$, qui sont des uplets avec au moins un a_i inversible à homothétie près.

8 Propriétés des schémas

Dans cette section, nous donnons quelques exemples de propriétés importantes des schémas.

8.1 Fermés irréductibles et points

Les fermés irréductibles jouent un rôle essentiel pour comprendre la topologie d'un schéma ; nous allons décrire leur relation avec les points. Soulignons le fait que les énoncés suivants sont purement topologiques : seul l'espace topologique sous-jacent entre en jeu. On rappelle que la notion d'espace irréductible possède différentes définitions équivalentes, voir exercice 3.2.6. La lectrice qui voudrait plus de détails sur la notion d'irréductibilité d'un espace topologique peut consulter Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. II, § 4, no 1.

8.1.1 Définition. Soit X un espace topologique. On appelle *composante irréductible* de X un fermé irréductible maximal, i.e. un fermé irréductible Y tel que pour toute inclusion $Y \subset Y'$ avec Y' fermé irréductible, on a $Y' = Y$.

8.1.2 Proposition. *Tout espace topologique est recouvert par ses composantes irréductibles.*

Démonstration : Soit $x \in X$ et E l'ensemble des fermés irréductibles de X qui contiennent x . On a $E \neq \emptyset$ car $\{x\} \in E$. De plus, la relation d'inclusion est un ordre inductif sur E , c'est-à-dire que toute chaîne d'éléments de E possède une borne supérieure. D'après le lemme de Zorn, E possède un élément maximal Y qui est un fermé irréductible maximal. (Pour se rafraîchir les idées sur le lemme de Zorn, on peut consulter l'excellent livre de Paul Halmos [Hal67].) \square

8.1.3 Lemme. *Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine.*

- (1) *L'adhérence d'un point $x = [p]$ est le fermé irréductible $V(p)$.*
- (2) *Les fermés irréductibles de X sont les ensembles $V(p)$ avec p premier.*
- (3) *Pour tout fermé irréductible $F \subset X$, il existe un unique point $\eta = \eta_F \in X$ tel que $\overline{\{\eta\}} = F$, appelé point générique de F . Les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :*

$$\text{Spec}(A) \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

- (4) *La bijection précédente est décroissante : si $x = [p]$ et $y = [q]$ sont deux points de X , on a $p \subset q$ si et seulement si $\{y\} \subset \{x\}$.*
- (5) *Les points fermés de X sont les $x = [p]$ où p est un premier maximal.*
- (6) *Les composantes irréductibles sont les fermés $V(p)$ où p est un premier minimal.*
- (7) *L'espace X est irréductible si et seulement si le nilradical de A est premier.*

Démonstration : (1) On a $\overline{\{x\}} = \bigcap_{p \in V(I)} V(I) = \bigcap_{p \supset I} V(I) = V(p)$ en utilisant, pour la dernière égalité, le fait que $I \subset J$ entraîne $V(I) \supset V(J)$.

(2) Un point $x = [p]$ est irréductible, donc son adhérence $V(p)$ aussi. Réciproquement, soit $F = V(I)$ un fermé irréductible de X . Soit $\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \geq 1, x^n \in I\}$ l'idéal racine de I . On sait que $\sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$, donc $V(I) = V(\sqrt{I})$. Quitte à remplacer I par \sqrt{I} on peut donc supposer que I est un idéal radical. Supposons que I n'est pas premier, alors il existe $a, b \in A$ tels que $a, b \notin I$ mais $ab \in I$. Alors $V(I, a) \cup V(I, b) = V(I)$. Par ailleurs, on a $V(I, a) \subsetneq V(I)$ car sinon, tout idéal premier contenant I contient a , donc $I = \sqrt{I} = \bigcap_{p \supset I} p$ contient a , contradiction. De même, on a $V(I, b) \subsetneq V(I)$. Ceci montre que $V(I)$ n'est pas irréductible, contradiction. Donc I est premier.

(3) D'après le point (2), le fermé F est de la forme $V(p)$ donc $\eta = [p]$ convient. Soient p, q deux premiers tels que $F = V(p) = V(q)$. Alors $p \in V(q)$ donc $p \supset q$. De même $q \supset p$, donc $p = q$ ce qui montre l'unicité de η . La bijection annoncée est claire.

(4) Laissez à la lectrice.

(5), (6). Comme la bijection précédente est décroissante, elle fait correspondre éléments minimaux et éléments maximaux de part et d'autre. Donc les points fermés (i.e. les fermés irréductibles minimaux)

correspondent aux premiers maximaux, et les composantes irréductibles (i.e. les fermés irréductibles maximaux) correspondent aux premiers minimaux.

(7) L'espace X est irréductible ssi il n'a qu'une composante irréductible, ssi A ne possède qu'un premier minimal p . Ceci signifie que le nilradical, qui est l'intersection de tous les premiers (les minimaux suffisent, bien sûr), est égal à p i.e. est un idéal premier. \square

L'énoncé 8.1.3(3) est valable pour un schéma quelconque :

8.1.4 Proposition. *Soit X un schéma. Alors tout fermé $F \subset X$ possède un unique point générique η_F et les applications $x \mapsto \overline{\{x\}}$ et $F \mapsto \eta_F$ définissent une bijection :*

$$|X| \xleftarrow{1-1} \{\text{fermés irréductibles de } X\}.$$

Démonstration : Nous nous contenterons de construire le point générique d'un fermé irréductible ; le reste est plus facile et laissé en exercice. Nous utiliserons le fait que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application $F \mapsto F \cap U$ est une bijection de l'ensemble des fermés irréductibles de X qui rencontrent U vers l'ensemble des fermés irréductibles de U , dont l'inverse est $G \mapsto \overline{G}$. De plus cette bijection est compatible avec la restriction à un sous-ouvert, en un sens évident.

Soit $F \subset X$ un fermé irréductible. Alors par définition F est non vide ; soit $x \in F$ un point. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert affine de x dans X . D'après le résultat dans le cas affine (lemme 8.1.3(3)), le fermé irréductible $F \cap U$ possède un unique point générique η_U dans U . Soit $V \subset X$ un autre voisinage ouvert affine de x dans X . Alors, pour tout choix d'un troisième voisinage ouvert affine $W \subset U \cap V$ de x , on a $\eta_U = \eta_W = \eta_V$ d'après l'assertion d'unicité dans le cas affine. Donc $\eta_F := \eta_U$ ne dépend pas de U . \square

L'ensemble des fermés irréductibles de X est muni de la relation d'inclusion. Si on traduit cette relation sur X à l'aide de la bijection précédente, on tombe sur les notions générales de spécialisation et de générisation dans un espace topologique.

8.1.5 Définition. Soient X un espace topologique et x, y deux points tels que $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$, ou de manière équivalente $y \in \overline{\{x\}}$. On dit alors que y est une *spécialisation* de x , ou que x est une *générisation* de y . On dit aussi que x se *spécialise* sur y , et on note $x \rightsquigarrow y$.

8.1.6 Exercice. (1) Dans un espace topologique, montrez que tout fermé est stable par spécialisation et tout ouvert est stable par générisation.

(2) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soient $x_1, x_2 \in X$. Montrez que $x_1 \rightsquigarrow x_2$ implique $f(x_1) \rightsquigarrow f(x_2)$.

8.2 Schémas réduits et intègres

8.2.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *réduit* si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. On dit qu'un schéma est *irréductible* si l'espace topologique sous-jacent $|X|$ l'est. On dit qu'un schéma X est *intègre* si pour tout ouvert *non vide* $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.

8.2.2 Exercice. Montrez que X est réduit ssi pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.

Pour tout ouvert $U \subset X$, on note $\mathcal{N}_0(U)$ l'ensemble des fonctions nilpotentes de $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{N}(U)$ l'ensemble des fonctions *localement* nilpotentes dans $\mathcal{O}_X(U)$. On appelle \mathcal{N}_0 le *préfaisceau nilradical* de \mathcal{O}_X et \mathcal{N} le *faisceau nilradical* de \mathcal{O}_X , à cause de l'exercice suivant.

8.2.3 Exercice. Montrez que :

- (1) $\mathcal{N}_0(U) = \mathcal{N}(U)$ pour tout U quasi-compact.
- (2) L'inclusion $i : \mathcal{N}_0 \hookrightarrow \mathcal{N}$ identifie \mathcal{N} au faisceau associé à \mathcal{N}_0 .
- (3) Le faisceau d'idéaux \mathcal{N} est quasi-cohérent.
- (4) Si X est noethérien, \mathcal{N}_0 est un faisceau.
- (5) Si $X = \coprod_{n \geq 0} \text{Spec}(k[t]/(t^n))$, pour un corps k , alors \mathcal{N}_0 n'est pas un faisceau.

L'exemple (5) montre que \mathcal{N}_0 n'est pas toujours un faisceau, contrairement à ce qui est affirmé dans [EH00], page 25. On peut même fabriquer un exemple dans lequel X est affine, en prenant le spectre de $A = \prod_{n \geq 0} k[t]/(t^n)$ et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice 8.3.6.

8.2.4 Proposition. *Soit X un schéma et $F \subset |X|$ un fermé. Alors, il existe un plus petit sous-schéma fermé $Y \subset X$ de support F . C'est le seul sous-schéma fermé de X de support F qui soit réduit. Si $F = |X|$, ce sous-schéma fermé est le schéma réduit X_{red} , dont le faisceau d'idéaux est le nilradical \mathcal{N} .*

Démonstration : Si $X = \text{Spec}(A)$ est affine, le fermé F est de la forme $V(I)$, pour un idéal $I \subset A$. De plus, on a vu en 7.3.7 que parmi tous les idéaux qui conviennent, il y en a un qui est maximal : c'est le seul qui soit *radical* i.e. tel que $I = \sqrt{I}$. Ceci signifie que le quotient A/I est réduit, c'est-à-dire que le schéma $V(I)$ est réduit. Si X est un schéma arbitraire, sur chaque ouvert affine U on dispose par ce qui précède d'un plus petit sous-schéma fermé Y_U de support $F \cap U$. Par unicité, les sous-schémas fermés Y_U coïncident sur les intersections $U \cap V$, donc se recollent en un unique sous-schéma fermé Y qui remplit les conditions demandées. \square

8.2.5 Proposition. *Un schéma est intègre si et seulement s'il est irréductible et réduit.*

Démonstration : Si X n'est pas réduit, il n'est pas intègre. S'il n'est pas irréductible, il existe deux ouverts non vides disjoints U, V . Dans ce cas $\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ n'est pas intègre, donc X n'est pas intègre.

Réciproquement, supposons X irréductible et réduit. Soit U un ouvert non vide et $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $fg = 0$. Alors les fermés $Z_f = \{x \in U; f(x) = 0 \in \kappa(x)\}$ et Z_g recouvrent X (le fait que ce sont des fermés découle de 6.2.11). Par irréductibilité, l'un des deux égale X , par exemple Z_f . Ceci signifie que le germe f_x est dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, pour tout $x \in U$. Alors dans tout ouvert affine de U la fonction f est nilpotente, donc nulle sur U par hypothèse. \square

8.3 Schémas noethériens

Les propriétés de finitude d'un anneau noethérien ont pour conséquence des propriétés de finitude pour le spectre : par exemple, les chaînes de fermés irréductibles $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq \dots$, qui correspondent aux chaînes d'idéaux premiers de l'anneau, sont de longueur finie. Sur un schéma général, il est clair que l'hypothèse de quasi-compacité est nécessaire pour conserver ces propriétés.

8.3.1 Définition. On dit qu'un schéma X est *localement noethérien* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont noethériens. On dit qu'un schéma X est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact.

8.3.2 Proposition. Soit X un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) X est localement noethérien,
- (2) pour tout ouvert affine $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien.

Démonstration : Seule l'implication (1) \Rightarrow (2) mérite un argument. Soit $U = \text{Spec}(A)$ ouvert affine et $\{I_k\}_{k \geq 0}$ une suite croissante d'idéaux de A . Utilisant le fait que X est localement noethérien et que tout localisé d'un anneau noethérien est noethérien, on voit que U peut être recouvert par des ouverts affines distingués $D(f)$ d'anneaux de fonctions A_f noethériens. De plus, par quasi-compacité de U on peut supposer ce recouvrement fini. Alors, pour tout f , la suite d'idéaux localisés $(I_k)_f$ est stationnaire, à partir d'un entier n que l'on peut supposer indépendant de f . Or, si I, J sont deux idéaux de A tels que $I_f = J_f$ pour tout f , alors $I = J$ (pour le voir, utiliser une partition de l'unité adaptée aux f^α pour un entier α bien choisi). Ceci montre que la suite I_k est stationnaire. Donc A est noethérien. \square

Voici un exemple de schéma noethérien.

8.3.3 Exemple. Soit k un corps. Un schéma est *localement de type fini sur k* s'il possède un recouvrement par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont des k -algèbres de type fini. On dit que X est *de type fini sur k* s'il est localement de type fini et quasi-compact. Par exemple, un sous-schéma d'un espace affine \mathbb{A}_k^n ou d'un espace projectif \mathbb{P}_k^n est de type fini sur k .

La propriété noethérienne a un pendant topologico-combinatoire introduit dans l'exercice suivant.

8.3.4 Exercice. On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute chaîne décroissante $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ de fermés est stationnaire.

- (1) Soit X un espace noethérien. Montrez que (i) toute partie munie de la topologie induite est un espace noethérien (ii) X est quasi-compact (iii) X possède un nombre fini de composantes irréductibles (iv) toute composante irréductible contient un ouvert non vide de X .
- (2) Montrez que le spectre d'un anneau noethérien est un espace topologique noethérien. Montrez que la réciproque est fautive en à l'aide d'un anneau non noethérien dont le spectre est ponctuel.

8.3.5 Proposition. Tout sous-schéma d'un schéma (localement) noethérien est (localement) noethérien.

Démonstration : Supposons X localement noethérien. Si $U \subset X$ est un sous-schéma ouvert, le fait que U est encore localement noethérien est clair. Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé, c'est tout aussi clair. Le cas d'un sous-schéma quelconque s'en déduit. Supposons de plus X quasi-compact. Alors il est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines dont le spectre est un espace noethérien, d'après 8.3.2 et 8.3.4(2). On en déduit que l'espace $|X|$ lui-même est noethérien. Alors tout sous-schéma a pour support un espace noethérien, donc quasi-compact, d'après 8.3.4(1). Ceci conclut. \square

8.3.6 Exercice. La proposition précédente implique que tout ouvert d'un schéma noethérien est quasi-compact. On peut construire un exemple de schéma affine (donc quasi-compact) qui possède des ouverts non quasi-compacts de la manière suivante. Sur un corps k , on prend l'anneau produit $A = k^{\mathbb{N}}$. Montrez que $X = \text{Spec}(A)$ contient comme ouvert le schéma non quasi-compact $U = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Spec}(k)$, somme disjointe dénombrable de k -points. Retrouvez le fait que $U \neq X$ en expliquant pourquoi il existe un idéal premier de A qui n'est pas le noyau de l'une des projections naturelles $A \rightarrow k$.

8.4 Variétés classiques

8.4.1 Variétés abstraites et variétés quasi-projectives. Dans la sous-section 2.3, pour simplifier nous n'avons parlé que d'ensembles algébriques affines, fermés dans l'espace affine $\mathbb{A}^n(k)$ sur un corps algébriquement clos. Les géomètres classiques étudiaient également les ensembles algébriques (quasi-)projectifs i.e. (localement) fermés dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$. La notion de quasi-projectivité existe aussi pour les schémas : il s'agit des schémas qui sont sous-schémas d'un espace projectif. Le livre de A. WEIL, *Foundations of Algebraic Geometry* publié en 1946 a introduit les ensembles algébriques abstraits, que l'on peut définir comme des espaces topologiques X possédant un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i . Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux tels ensembles est une application continue telle qu'il existe des recouvrements ouverts $X = \cup X_i$, $Y = \cup Y_j$ par des ensembles algébriques affines $X_i \subset \mathbb{A}^{n_i}(k)$ et $Y_j \subset \mathbb{A}^{m_j}(k)$, et des applications à composantes polynomiales $f_{i,j} : \mathbb{A}^{n_i}(k) \rightarrow \mathbb{A}^{m_j}(k)$ satisfaisant $f_{i,j}(X_i) \subset Y_j$ et $f|_{X_i} = f_{i,j}$.

La théorie des schémas englobe les variétés classiques. Dans le cas affine, c'est simplement parce qu'on dispose d'équivalences de catégories :

$$\left(\begin{array}{c} \text{ensembles} \\ \text{algébriques} \\ \text{affines sur } k \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} k\text{-algèbres} \\ \text{de type fini} \\ \text{réduites} \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} k\text{-schémas affines} \\ \text{de type fini} \\ \text{réduits} \end{array} \right)$$

où la première équivalence donnée par le Nullstellensatz de Hilbert (voir § 2.3) et la seconde est donnée par l'équivalence entre anneaux et schémas affines (exercice 6.2.5). Plus généralement, on a l'énoncé suivant. Pour en faciliter la lecture, rappelons que les variétés sont les ensembles algébriques irréductibles et que les schémas de type fini sur k ont été définis dans 8.3.3.

8.4.2 Théorème. *Soit k un corps algébriquement clos. Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des ensembles algébriques (abstraites) sur k dans la catégorie des k -schémas, qui induit les*

équivalences de catégories suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{ensembles algébriques abstraits}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas de type fini réduits}\} \\
 \cup & & \cup \\
 \{\text{ensembles algébriques quasi-projectifs}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas quasi-projectifs réduits}\} \\
 \cup & & \cup \\
 \{\text{variétés algébriques quasi-projectives}\} & \xrightarrow{\sim} & \{k\text{-schémas quasi-projectifs intègres}\}
 \end{array}$$

Démonstration : Le Nullstellensatz de Hilbert affirme que tout ensemble algébrique affine X détermine une k -algèbre de type fini réduite $A = \Gamma(X)$ telle que $X = \text{Spm}(A)$. En particulier $X = \text{Spm}(A)$ détermine le schéma $X' = \text{Spec}(A)$. De plus, une inclusion ouverte d'ensembles algébriques affines $i : X_1 \rightarrow X_2$ induit un morphisme de k -algèbres $A_2 \simeq A_1$ et une immersion ouverte de schémas $i' : X'_1 \simeq X'_2$, telle que i est un isomorphisme si et seulement si i' est un isomorphisme. Si X est un ensemble algébrique abstrait quelconque, choisissons un recouvrement ouvert par des ensembles algébriques affines X_i , notons $X_{i,j} = X_i \cap X_j$ et soit $\varphi_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{j,i}$ l'identité de $X_i \cap X_j$. Par ce qui précède, ces données donnent naissance à une famille de schémas X'_i et de sous-schémas ouverts $X'_{i,j} \subset X'_i$ avec des isomorphismes $\varphi'_{i,j} : X'_{i,j} \rightarrow X'_{j,i}$ qui satisfont clairement les conditions de recollement. On note X' le schéma obtenu par recollement. Il n'est pas difficile de construire de même le morphisme de schémas $f' : X'_1 \rightarrow X'_2$ associé à un morphisme d'ensembles algébriques $f : X_1 \rightarrow X_2$. On a ainsi défini le foncteur annoncé. Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle provient du fait que la bijection $\text{Hom}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}(A_2, A_1) \simeq \text{Hom}(X'_1, X'_2)$ donnée par le Nullstellensatz pour X_1, X_2 affines, s'étend par recollement au cas d'ensembles algébriques quelconques. Le fait que l'image essentielle de ce foncteur soit égale à la sous-catégorie pleine des k -schémas de type fini réduits peut se prouver en construisant un foncteur inverse $X' \mapsto X$ par le même procédé que pour le foncteur direct, i.e. en définissant $X' \mapsto A = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \mapsto X = \text{Spm}(A)$ dans le cas affine et en recollant. Le fait qu'ensembles algébriques quasi-projectifs et k -schémas quasi-projectifs réduits se correspondent provient essentiellement du fait que $(\mathbb{P}^n(k))' = \mathbb{P}^n_k$, i.e. le schéma associé à la variété algébrique classique $\mathbb{P}^n(k)$ est le schéma \mathbb{P}^n_k . Le fait que les variétés correspondent aux schémas intègres provient du fait qu'un schéma réduit est irréductible si et seulement s'il est intègre. \square

On notera que, comme on l'a déjà dit, l'inclusion $\text{Spm}(A) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$ identifie $\text{Spm}(A)$ à l'ensemble des points fermés, ou fermés irréductibles minimaux, de $\text{Spec}(A)$. Plus généralement, un ensemble algébrique abstrait X peut se voir comme l'ensemble des points fermés du support $|X'|$ de son schéma associé; et le support $|X'|$ d'un k -schéma de type fini réduit peut se voir comme l'ensemble des sous-variétés de la variété classique correspondante X .

8.4.3 Exercice. Soit k un corps algébriquement clos. On considère la variété algébrique classique $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\} = k^*$, complémentaire du point origine 0 dans la droite affine sur k . Munie de la multiplication dans k^* , c'est un groupe algébrique qu'on l'appelle le *groupe multiplicatif* de k et qu'on note $\mathbb{G}_m(k)$.

- (1) La variété k^* est-elle réduite? quasi-projective? intègre?
- (2) Décrivez le k -schéma de type fini $\mathbb{G}_{m,k}$ associé par l'équivalence de 8.4.2 à $\mathbb{G}_m(k)$.

(3) Décrivez en termes schématiques les morphismes qui donnent la structure de « schéma en groupes », c'est-à-dire la multiplication $\mathbb{G}_{m,k} \times_{\text{Spec}(k)} \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ et le morphisme qui donne la section neutre $\text{Spec}(k) \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$.

(3) Pour tout n entier, calculez le morphisme d'élévation à la puissance n -ième, au sens de la multiplication itérée dans ce schéma en groupes.

(4) Le noyau du morphisme de puissance n -ième, défini comme un égalisateur convenable (cf 6.6.11), est noté $\mu_{n,k}$ et appelé *schéma en groupes des racines n -ièmes de l'unité*. Donnez sa définition précisément et décrivez-le : quel est son espace topologique sous-jacent ? Est-il affine, irréductible, réduit ?

8.5 Schémas sur un corps non algébriquement clos

Nous allons donner des exemples de schémas sur un corps k qui illustrent trois caractéristiques de la situation où k possède une arithmétique intéressante, c'est-à-dire n'est pas algébriquement clos :

- la présence ou non de points rationnels,
- la possibilité que le schéma soit défini sur un certain sous-corps,
- le fait que certaines propriétés soient perdues par changement de base à une clôture algébrique, et la nécessité de considérer les propriétés *géométriques*.

On fixe donc un corps k . Tout k -schéma X est muni d'un morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ appelé « morphisme de structure ». Les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ de fonctions régulières sur des ouverts, les anneaux locaux et les corps résiduels de points $x \in X$ sont des k -algèbres.

Un point rationnel du sous-schéma fermé de \mathbb{A}^n défini par des polynômes en n variables f_1, \dots, f_r doit correspondre à une solution $a = (a_1, \dots, a_r)$ dans k^r du système $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si on pose $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$, une telle solution détermine un unique morphisme de k -algèbres $A \rightarrow k$ c'est-à-dire un unique morphisme $\text{Spec}(k) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$. Si on veut considérer aussi les solutions $a \in l^r$ pour des extensions l/k , on est amené à la définition suivante.

8.5.1 Définition. Soit l/k une extension de corps. Un *point l -rationnel*, ou *l -point*, ou *point à valeurs dans l* , est un morphisme de k -schémas $\text{Spec}(l) \rightarrow X$. On dit parfois *point rationnel* au lieu de *point k -rationnel*. On note $X(l) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(l), X)$ l'ensemble des points l -rationnels de X .

8.5.2 Remarques. (1) Sur un corps algébriquement clos, cette notation est cohérente avec les notations $\mathbb{A}^n(k)$ et $\mathbb{P}^n(k)$ que nous avons utilisées pour désigner l'espace affine et l'espace projectif en tant que variétés algébriques classiques, qui sont les ensembles de points k -rationnels des schémas \mathbb{A}_k^n et \mathbb{P}_k^n . (Et la notation évidemment redondante $\mathbb{A}_k^n(k)$ est simplifiée en $\mathbb{A}^n(k)$.)

(2) Pour toute extension de corps l/k , notons $X_l = X \otimes_k l = X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(l)$ qui est naturellement un l -schéma. On a alors une bijection naturelle entre $X(l)$ et $X_l(l)$, i.e. entre points l -rationnels du k -schéma X et points rationnels du l -schéma X_l .

(3) Si l/k est une extension galoisienne, le groupe de Galois $G = \text{Gal}(l/k)$ agit à droite sur $X(l)$ de la manière suivante : à tout k -automorphisme $\sigma : l \rightarrow l$ est associé un morphisme $\text{Spec}(l) \rightarrow \text{Spec}(l)$ et on agit sur $\text{Hom}_k(\text{Spec}(l), X)$ par précomposition.

8.5.3 Proposition. Soit k un corps et X un k -schéma localement de type fini. Soit \bar{k} une clôture algébrique, et notons $G_l := \text{Gal}(l/k)$ le groupe des k -automorphismes d'une extension $k \subset l \subset \bar{k}$. Alors, l'ensemble $|X|_0$ des points fermés de X est dense et on a :

$$|X|_0 = \bigcup_{\substack{l/k \text{ finie} \\ \text{galoisienne}}} X(l)/G_l = X(\bar{k})/G_{\bar{k}}.$$

Autrement dit, les points fermés de X sont en bijection avec les orbites de $X(\bar{k})$ sous l'action du groupe de Galois.

Le symbole \cup qui apparaît désigne soit une réunion dans $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$ soit une limite inductive.

Démonstration : L'énoncé est local sur X donc on peut remplacer X par un ouvert affine et donc supposer $X = \text{Spec}(A)$ affine. Dire que l'ensemble des points fermés de X est dense revient à dire qu'un idéal $I \subset A$ qui est inclus dans tous les idéaux maximaux est nilpotent. Ceci découle du fait que les algèbres de type fini sur un corps sont des *anneaux de Jacobson*, i.e. tout premier est intersection d'idéaux maximaux (plus généralement, la propriété de Jacobson est stable par passage à une algèbre de type fini). Ce résultat est une forme forte du Nullstellensatz et on le trouve dans [Mat89], th. 5.5 ou [Ei95], th. 4.19.

Maintenant soit $x \in X$ un point fermé, i.e. $x = [m]$ avec m maximal. Alors le corps résiduel $l := \kappa(x) = A/m$ est une extension finie de k d'après [Mat89], th. 5.4. Ceci détermine un l -point de X puis une orbite sous G_l . Réciproquement, considérons une orbite de $X(l)$ sous G_l . Elle est représentée par un morphisme de k -algèbres $\varphi : A \rightarrow l$. Le noyau $m = \ker(\varphi)$ est un idéal maximal de A , qui ne dépend pas du choix d'un élément dans l'orbite de φ puisque $\ker(\sigma\varphi) = \ker(\varphi)$. Il détermine un point fermé de X .

Enfin, le fait que tout \bar{k} -point de X se factorise par un l -point pour une extension finie l/k provient du fait que si $\varphi : A \rightarrow \bar{k}$ est un morphisme de k -algèbres, alors l'image est une k -algèbre intègre, algébrique et de type fini, donc un corps extension finie de k . On en déduit que l'ensemble $|X|_0$ se décrit aussi comme $X(\bar{k})/G_{\bar{k}}$. \square

8.5.4 Exemple. Le groupe de Galois de \mathbb{C}/\mathbb{R} est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et engendré par la conjugaison complexe. Dans le \mathbb{R} -schéma $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$, le point déterminé par l'idéal maximal $(t^2 + 1)$ correspond à l'orbite du \mathbb{C} -point $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto i$. L'autre point de l'orbite est le \mathbb{C} -point $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto -i$.

8.5.5 Remarque. On trouvera une étude plus fine du lien entre le k -schéma X et le \bar{k} -schéma $X \otimes_k \bar{k}$ dans Mumford [Mu99], II, § 4.

8.5.6 Exercice. (1) Soit k un corps algébriquement clos. Montrez que dans la catégorie des ensembles algébriques classiques, les produits existent, et que ensemblistement l'ensemble algébrique produit $X \times Y$ est le produit des ensembles algébriques X et Y . (On pourra commencer par le cas affine.)

(2) Montrez que l'équivalence de catégories du théorème 8.4.2 est compatible au produit.

(3) Montrez que si k n'est pas algébriquement clos, il est faux en général que l'ensemble des points fermés d'un schéma produit $X \times_{\text{Spec}(k)} Y$ est égal au produit des ensembles de points fermés de X et Y . (On pourra regarder le cas où $X = Y = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ dans [EH00], II.2.)

8.5.7 Définition. Soit k un corps et X un k -schéma. On dit que X est *géométriquement réduit* (resp. *irréductible, intègre, connexe*) si $X \otimes_k \bar{k}$ est réduit (resp. irréductible, intègre, connexe).

Il est équivalent de demander que $X \otimes_k l$ soit réduit (irréductible, intègre, connexe) pour toute extension finie l/k . On montre facilement que si X est géométriquement *truc*, alors il est *truc*. Par exemple, dans le cas géométriquement réduit, on se ramène au cas affine et le résultat découle du fait qu'on a une injection d'anneaux $A \hookrightarrow A \otimes_k \bar{k}$ donc A est réduit si $A \otimes_k \bar{k}$ l'est.

Nous sommes plutôt intéressés par des exemples qui montrent que les assertions réciproques ne sont pas vraies en général.

8.5.8 Exemples. (1) Soit k un corps non parfait et $a \in k$ un élément qui n'est pas une puissance p -ième. Soit $l = k[t]/(t^p - a)$ qui est un corps, extension purement inséparable de degré p de k . Posons $X = \text{Spec}(l)$. Alors X est réduit (et même intègre). Soit $\alpha \in l$ une racine p -ième de a , par exemple la classe de t . On a :

$$l \otimes_k l = l[t]/(t^p - a) = l[t]/((t - \alpha)^p).$$

Cet anneau n'est pas réduit, donc $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l)$ non plus. De manière générale, ce sont les extensions inséparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère réduit par extension de corps.

(2) Soit $k = \mathbb{Q}$ et X le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$ d'équation $x^2 - 2y^2 = 0$. Alors X est intègre, mais comme $x^2 - 2y^2 = (x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$, le schéma $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ n'est pas irréductible. De manière générale, ce sont les extensions séparables de corps qui sont responsables de la perte du caractère irréductible par extension de corps.

(3) Soit l/k une extension finie galoisienne non triviale de groupe de Galois G . On a un morphisme d'anneaux $u : l \otimes_k l \rightarrow \prod_{\sigma \in G} l$ défini sur les tenseurs irréductibles par $a \otimes b \mapsto (a\sigma(b))_{\sigma \in G}$. On peut voir que u est un isomorphisme d'au moins deux manières :

- on observe que u peut être vu comme une application linéaire entre deux l -espaces vectoriels de dimension $n = [l : k]$, puisque $u(a \otimes b) = au(1 \otimes b)$. Comme l/k est séparable, elle est monogène et on peut en choisir un générateur α . Alors $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \alpha, \dots, 1 \otimes \alpha^{n-1}\}$ est une l -base de $l \otimes_k l$. Notons $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Le déterminant de u dans les bases convenables est le déterminant de Vandermonde $\det(\sigma_i(\alpha)^j) = \prod_{i < j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))$. Il est non nul.
- si on choisit un polynôme $P \in k[t]$ dont l est le corps de décomposition, alors l est engendré par une racine β de P et ses conjugués $\sigma_i(\beta)$. Le morphisme u s'identifie au morphisme :

$$l \otimes_k l \simeq l[t]/(P(t)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l[t]/(t - \sigma(\beta)) \simeq \prod_{\sigma \in G} l.$$

Considérons le k -schéma $X = \text{Spec}(l)$. Il résulte de ce qui précède que $X \otimes_k l = \text{Spec}(l \otimes_k l) = \coprod_{\sigma \in G} \text{Spec}(l)$. Ainsi X est connexe, mais pas géométriquement connexe. Ici aussi, les extensions séparables de corps causent la perte du caractère connexe par extension de corps.

8.5.9 Définition. Soit X un schéma sur un corps k . On dit que X *peut être défini sur un sous-corps* $k_0 \subset k$ s'il existe un k_0 -schéma X_0 et un isomorphisme de k -schémas $X \simeq X_0 \otimes_{k_0} k$.

Le k_0 -schéma X_0 , s'il existe, n'est pas unique en général. Voici un exemple.

8.5.10 Exemple. La droite projective complexe $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ peut être définie sur \mathbb{R} d'au moins deux manières. Notons $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la conique projective plane réelle d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On a $X_0 \not\simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ car la conique X_0 ne possède pas de point \mathbb{R} -rationnel. Il est clair que $X \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et nous allons voir que l'on a aussi $X \simeq X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce fait classique provient de la paramétrisation des coniques ayant un point rationnel. Plus précisément, si P est un point rationnel d'une conique projective plane C , les droites D_t passant par P sont paramétrées par les points $t = (u : v)$ d'une droite projective. Elles intersectent la conique en un unique point Q distinct de P , sauf la tangente en P pour laquelle on prend $Q = P$. Ceci fournit l'isomorphisme désiré. Explicitement, en prenant le point \mathbb{C} -rationnel $P = (i : 1 : 0)$ dans la conique $X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\longrightarrow X_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ (u : v) &\longmapsto (i(u^2 + v^2) : u^2 - v^2 : 2uv) \\ (y - ix : z) &\longleftarrow (x : y : z) \end{aligned}$$

La présence inévitable du i montre qu'un isomorphisme $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow X_0$ peut être défini après changement de base à \mathbb{C} , alors qu'il n'en existe pas sur \mathbb{R} .

8.6 Schémas arithmétiques

Nous donnons deux exemples de schémas sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui permettent d'avoir un bref aperçu sur :

- la manière dont la théorie algébrique des nombres se plonge dans le monde des schémas ;
- la notion de « famille d'objets » en géométrie algébrique et le rôle de la platitude.

8.6.1 Un anneau d'entiers algébriques. Considérons le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, son anneau d'entiers $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et le morphisme $f : X = \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. En théorie algébrique des nombres, on cherche à comprendre comment les premiers $p \in \mathbb{Z}$ se décomposent dans \mathcal{O}_K , ce qui revient à étudier l'idéal $p\mathcal{O}_K$. Comme $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$, on voit que ceci revient à étudier les fibres de f . L'invariant le plus important est le *discriminant* de K , défini en général par $\text{disc}(K) = (\det(\sigma_i(\alpha_j)))^2$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ (ou les éléments du groupe de Galois de K/\mathbb{Q} , dans le cas galoisien). Ici on prend $\{1, \sqrt{3}\}$ pour \mathbb{Z} -base et $\{\text{id}, \sigma : \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}\}$ pour liste de plongements complexes. On obtient :

$$\text{disc}(K) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}^2 = 12.$$

Comme dans 8.5.8(3), cette quantité mesure le défaut de bijectivité de l'application :

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \\ a \otimes b & \longmapsto & (ab, a\sigma b). \end{array}$$

En l'occurrence, après localisation en 12 c'est-à-dire après tensorisation par $\mathbb{Z}[1/12]$ celle-ci devient un isomorphisme. C'est ce fait qui est derrière la description géométrique des fibres de $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Avant de donner cette description, signalons que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 3)$ et que $\text{disc}(K)$ peut aussi se calculer comme le discriminant du polynôme $X^2 - 3$. Il y a trois types de comportements possibles :

- (i) si $p \mid \text{disc}(K)$ i.e. $p = 2$ ou 3 , alors p devient carré dans \mathcal{O}_K . Précisément $2\mathcal{O}_K = (1 + \sqrt{3})^2$ et $3\mathcal{O}_K = (\sqrt{3})^2$. La fibre X_p est le spectre de $\mathbb{F}_p[X]/(X^2)$, c'est un point non réduit de corps résiduel \mathbb{F}_p .
- (ii) si $p > 3$ et 3 est un carré modulo p , le polynôme $X^2 - 3$ se factorise dans \mathbb{F}_p en produit de facteurs de degré 1. Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 1 ou 11 modulo 12. La fibre X_p est réunion de deux points réduits, \mathbb{F}_p -rationnels.
- (iii) si $p > 3$ et 3 n'est pas carré modulo p , le polynôme $X^2 - 3$ est irréductible dans \mathbb{F}_p . Par réciprocity quadratique, ce cas se produit lorsque p est congru à 5 ou 7 modulo 12. Ici la fibre X_p est composée d'un seul point \mathbb{F}_{p^2} -rationnel.

L'apparition d'éléments nilpotents dans la fibre dans le cas (i) est typique du comportement de ramification. La situation est géométriquement très différente de ce qu'il se produit dans les deux derniers cas. Les cas (ii) et (iii) présentent une différence arithmétique qui se manifeste dans les corps résiduels. En revanche leur géométrie est essentiellement la même, au sens où après une extension finie de la base destinée à s'affranchir des contraintes arithmétiques, les fibres sont des réunions de deux points réduits. C'est ce que montre l'application (\star).

8.6.2 Une famille de coniques. Soit $f = Y^2 - X^2 - 5$ et $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y]/(f))$. Nous ne développons pas la notion de *lissité* dans ce cours ; contentons-nous pour analyser cet exemple de dire que, comme en géométrie différentielle, le lieu où X est lisse sur \mathbb{Z} est l'ensemble des points x en lesquels la matrice jacobienne $J = (\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ est de rang maximum, c'est-à-dire ici 1, ce qui signifie que dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, ou de manière équivalente dans le corps résiduel $\kappa(x)$, l'un des 1-mineurs de J est inversible. Notons $x = [q]$ un point quelconque de X et $s = f(x) = [p]$ où $p = q \cap \mathbb{Z}$. Dans notre exemple, la matrice $J = (2X, 2Y)$ est de rang 1 en $x = [q]$ si et seulement si l'idéal $(2X, 2Y)$ est inclus dans q . Il est équivalent de dire que $2 \in q$ ou que $(X, Y) \subset q$. Dans le deuxième cas, l'équation f implique que $5 \in q$. On peut résumer ainsi :

- la fibre de X en $p = 2$ est singulière, son équation $f = (Y + X + 1)^2$ est celle d'une droite double (d'épaisseur 2) dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_2}^2$,
- la fibre de X en $p = 5$ est singulière, son équation $f = (Y - X)(Y + X)$ est celle de la réunion de deux droites avec une intersection transverse en $x = y = 0$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_5}^2$,
- les autres fibres, y compris la fibre générique, sont des coniques lisses.

9 Propriétés des morphismes

Dans cette section, nous définissons quelques grandes classes de morphismes de schémas reliées principalement à des propriétés de séparation, finitude et compacité. Pour des raisons de temps et de place, nous ne développerons pas l'étude des propriétés de régularité (platitude, lissité, non ramification, caractère étale). Avant de commencer, faisons deux remarques générales.

La première remarque concerne le lien avec le point de vue relatif, mis en avant par Grothendieck et aperçu lors de l'étude des produits fibrés et des exemples de schémas arithmétiques comme la famille de coniques 8.6.2. Son principe est de mettre l'accent sur les objets sur une base S , c'est-à-dire les morphismes $X \rightarrow S$, plutôt que sur les schémas individuels. La logique et le développement harmonieux de ce point de vue nécessitent de développer des analogues relatifs de certaines notions absolues des schémas (comme le caractère affine, la quasi-compacité...). Une règle simple sera vérifiée :

un schéma X possèdera une propriété « absolue » si et seulement si le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ possède la propriété « relative » correspondante.

La seconde remarque concerne les qualités de stabilité, ou de permanence, des différentes propriétés des morphismes. Nous donnons quatre exemples. Soit P une propriété que peut avoir ou non un morphisme de schémas.

- On dit que P est *stable par composition* si pour tout couple de morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow S$ qui possèdent P , la composée $g \circ f : X \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par changement de base* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ possède P (ici $X' := X \times_S S'$ et f' est la projection).
- On dit que P est *stable par localisation à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $X_i \subset X$, le morphisme $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P . On dit que P est *locale à la source* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{X_i\}$ de X , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow S$ possède P .
- On dit que P est *stable par localisation au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ qui possède P , et tout ouvert $S_i \subset S$, le morphisme $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P . On dit que P est *locale au but* si pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$, et pour tout recouvrement ouvert $\{S_i\}$ de S , le morphisme f possède P si et seulement si chaque restriction $f|_{f^{-1}(S_i)} : f^{-1}(S_i) \rightarrow S_i$ possède P .

Pour chacune des propriétés introduites dans cette section, on peut se poser la question de savoir si elle est stable par composition, changement de base, localisation à la source ou au but. Nous donnerons parfois un énoncé explicite, et parfois un énoncé sous forme d'exercice. Parfois aussi nous omettrons de poser la question, et la lectrice pourra se la poser pour elle-même.

9.1 Morphismes séparés

On peut consulter la page [https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_\(topologie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_de_séparation_(topologie)) pour un rappel sur les différents axiomes de séparation. Rappelons quelques propriétés d'un espace topologique séparé (*Hausdorff space* en anglais). Elles sont toutes équivalentes et peuvent servir de définition de la notion de séparation :

- (i) pour tous points distincts $x, y \in X$ il existe des voisinages ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \ni y$,
- (ii) la diagonale Δ_X est fermée dans $X \times X$,
- (iii) pour tout espace topologique Y et toute application continue $f : Y \rightarrow X$, le graphe $\Gamma_f = \{(y, f(y)); y \in Y\}$ est fermé dans $X \times Y$,
- (iv) pour tout espace topologique Y et toute paire d'applications continues $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = \{y \in Y; f(y) = g(y)\}$ est fermé dans Y .

La propriété (i) est la plus familière; c'est l'axiome T_2 . La démonstration du fait qu'elle est équivalente aux trois autres utilise le fait que la topologie sur $X \times X$ est la topologie produit, avec pour base d'ouverts les produits $U \times V$ d'ouverts de X . Ceci n'a pas lieu dans le monde des variétés algébriques ou des schémas (dans le plan \mathbb{A}_k^2 , l'ouvert complémentaire d'une courbe qui n'est ni horizontale ni verticale ne contient aucun ouvert produit non trivial). En conséquence, la

caractérisation (i) de la séparation est pratiquement inutile pour les schémas. En revanche les autres caractérisations sont pertinentes ; nous utiliserons (ii).

9.1.1 Lemme. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ la diagonale. Alors $\Delta_{X/S}$ est :*

- (1) *une immersion ;*
- (2) *une immersion fermée si X et S sont affines.*

Démonstration : Démontrons d'abord (2). Si $X = \text{Spec}(A)$ et $S = \text{Spec}(R)$, la diagonale est déterminée par le morphisme d'anneaux $A \otimes_R A \rightarrow A$ qui envoie $a \otimes 1$ sur a et $1 \otimes a'$ sur a' . C'est le morphisme de multiplication, qui est surjectif. Passons à (1). Soit $x \in X$. Soit U un voisinage ouvert affine de $f(x)$ et V un voisinage ouvert affine de x inclus dans $f^{-1}(U)$. Clairement l'image de la diagonale est incluse dans les ouverts de la forme $V \times_U V$. De plus $\Delta_{X/S|V} : V \rightarrow V \times_U V$ est une immersion fermée d'après le cas (2). Ceci conclut. \square

9.1.2 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *séparé* si la diagonale relative $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée. On dit aussi que X est un S -schéma séparé.

9.1.3 Proposition. *Les morphismes séparés sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. \square

9.1.4 Définition. On dit qu'une immersion ouverte $i : U \hookrightarrow X$ est *schématiquement dense dans X* si le morphisme de restriction des fonctions $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_U$ est injectif.

9.1.5 Proposition. *Soit X un S -schéma séparé.*

- (1) *Pour tout morphisme de S -schémas $f : Y \rightarrow X$, le morphisme graphe $\Gamma_f := (\text{id}, f) : Y \rightarrow Y \times_S X$ est une immersion fermée.*
- (2) *Pour toute paire de S -morphisms $f, g : Y \rightarrow X$, l'égalisateur $\text{egal}(f, g) = Y \times_{(f,g), X \times_S X, \Delta} X$ est un sous-schéma fermé de Y .*
- (3) *Pour toute paire de S -morphisms $f, g : Y \rightarrow X$ qui coïncident sur un ouvert schématiquement dense $U \subset Y$, on a $f = g$.*

Démonstration : (1) Le graphe $\Gamma_f : Y \rightarrow Y \times_S X$ s'obtient à partir de la diagonale $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ par changement de base par le morphisme $(f \times \text{id}) : Y \times_S X \rightarrow X \times_S X$. Le résultat découle donc du fait que les immersions fermées sont stables par changement de base.

(2) Par définition $\text{egal}(f, g)$ s'obtient par un changement de base de la diagonale.

(3) Soit i l'immersion fermée de $Z = \text{egal}(f, g)$ dans Y . Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte. Par hypothèse j se factorise par un morphisme $k : U \rightarrow Z$ (qui est nécessairement une immersion), i.e. $j = ik$. Comme U est schématiquement dense (définition 9.1.4), le morphisme composé

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{i^\#} i_*\mathcal{O}_Z \xrightarrow{i_*k^\#} j_*\mathcal{O}_U = i_*k_*\mathcal{O}_U$$

est injectif. On en déduit que $\mathcal{O}_Y \rightarrow i_*\mathcal{O}_Z$ est injectif, et comme il est surjectif c'est un isomorphisme de faisceaux. Donc $Z \simeq Y$, ce qui montre que $f = g$. \square

9.1.6 Exercice. Soit X la droite affine avec origine dédoublée, sur un corps de base k (voir 6.3.6). Montrez que X n'est pas séparé sur k . Donnez un exemple de deux morphismes de k -schémas $f, g : Y \rightarrow X$ qui sont distincts mais coïncident sur un ouvert schématiquement dense de Y .

9.2 Morphismes affines et quasi-compacts

9.2.1 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *affine* si la préimage de tout ouvert affine de S est un ouvert affine de X .

9.2.2 Proposition. *Les morphismes affines sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. \square

Une immersion fermée est affine. Tout sous-schéma fermé de \mathbb{A}_S^n est affine sur S .

9.2.3 Exercice. Montrez que $f : X \rightarrow S$ est affine si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines S_i tels que $f^{-1}(S_i)$ est affine pour tout i .

9.2.4 Exercice. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas affine.

On peut maintenant généraliser au cadre relatif l'équivalence de catégories entre anneaux et schémas affines.

9.2.5 Proposition. *Si $f : X \rightarrow S$ est un S -schéma affine, la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{A}(X) = f_*\mathcal{O}_X$ est quasi-cohérente. Si \mathcal{A} est une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente, le S -schéma $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est affine. Les foncteurs :*

$$\{\mathcal{O}_S\text{-algèbres quasi-cohérentes}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Spec}} \\ \xleftarrow{\mathcal{A}} \end{array} \{S\text{-schémas affines}\}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration : Soit $f : X \rightarrow S$ un S -schéma affine. Il suffit de vérifier que $\mathcal{A}(X)$ est quasi-cohérente sur un recouvrement de S par des ouverts affines $S_i = \text{Spec}(R_i)$, d'après 7.2.9. Notons $X_i = f^{-1}(S_i)$ qui est un schéma affine, et $f_i : X_i \rightarrow S_i$ la restriction de f . Par définition de $f_*\mathcal{O}_X$ on voit que $\mathcal{A}(X)|_{S_i} = f_{i,*}\mathcal{O}_{X_i}$, qui est une algèbre quasi-cohérente d'après l'exercice 7.2.12. Soit \mathcal{A} une \mathcal{O}_S -algèbre quasi-cohérente et $f : X = \text{Spec}(\mathcal{A}) \rightarrow S$. Alors, par construction du spectre d'une \mathcal{O}_S -algèbre, pour tout ouvert affine $U \subset S$ on a $f^{-1}(U) = \text{Spec}(\mathcal{A}(U))$ qui est un schéma affine. Le fait que les deux foncteurs sont des équivalences quasi-inverses est laissé au lecteur. \square

9.2.6 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *quasi-compact* si la préimage de tout ouvert quasi-compact de S est un ouvert quasi-compact de X .

9.2.7 Proposition. *Les morphismes quasi-compacts sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

9.2.8 Exercice. Montrez que $f : X \rightarrow S$ est quasi-compact si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines S_j tels que $f^{-1}(S_j)$ est quasi-compact pour tout j .

Nous terminons par un résultat sur l'image des morphismes quasi-compacts, qui nous sera utile dans l'étude des morphismes propres.

9.2.9 Proposition. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $f(X)$ est fermé,
- (2) $f(X)$ est stable par spécialisation.

Démonstration : On sait que (1) \Rightarrow (2), montrons que (2) \Rightarrow (1). Il suffit de montrer que $f(X) \cap U$ est fermé dans U , pour tout ouvert affine U de S . Comme $f(X) \cap U$ est stable par les spécialisations dans U , quitte à changer S en U on s'est ramené au cas où S est affine. Comme f est quasi-compact, le schéma X est alors recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $X_i = \text{Spec}(A_i)$. L'image de f est égale à l'image de la composée $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n \rightarrow X \rightarrow S$. Comme $X_1 \amalg \cdots \amalg X_n$ est le schéma affine spectre de $A_1 \times \cdots \times A_n$, on s'est ramené au cas où X est affine.

Supposons donc que $S = \text{Spec}(R)$ et $X = \text{Spec}(A)$. Soit $s = [p]$ un point dans l'adhérence de $T := f(X)$, c'est-à-dire que $D(g) \cap T \neq \emptyset$ pour tout $g \in R$, $g \notin p$. Comme $D(g) \cap T$ est l'image de la restriction de f à $X_g = D(g1_A) = \text{Spec}(A_g)$, on déduit que A_g est non nul, ou encore que $1 \neq 0$ dans A_g . Soit A_p le localisé de A par rapport à la partie multiplicative $R \setminus p$. On a $A_p = \varinjlim_{g \notin p} A_g$. On a encore $1 \neq 0$ dans A_p , donc cet anneau est non nul. L'image de n'importe quel point de $\text{Spec}(A_p)$ par le composé $\text{Spec}(A_p) \rightarrow \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ est un idéal premier p' inclus dans p . Donc $s = [p]$ est spécialisation de $s' = [p'] \in T$. Comme T est stable par spécialisation, on conclut que $s \in T$. □

9.3 Morphismes de type fini, morphismes finis

9.3.1 Définition. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *localement de type fini* si pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ de S et pour tout ouvert affine $V = \text{Spec}(A)$ de $f^{-1}(U)$, le morphisme $R \rightarrow A$ fait de A une R -algèbre de type fini. On dit que f est *de type fini* s'il est quasi-compact et localement de type fini.

9.3.2 Proposition. *Les morphismes localement de type fini sont stables par composition, changement de base, localisation à la source et localisation au but. Les morphismes de type fini sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

9.3.3 Exercice. Montrez que $f : X \rightarrow S$ est localement de type fini si et seulement s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines $S_j = \text{Spec}(R_j)$ et un recouvrement de X par des ouverts affines $X_{i,j} = \text{Spec}(A_{i,j})$ tels que $f(X_{i,j}) \subset S_j$ et que $A_{i,j}$ est une R_j -algèbre de type fini.

9.3.4 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *fini* si pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ de S , la préimage $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert affine $V = \text{Spec}(A)$ et le morphisme $R \rightarrow A$ fait de A un R -module de type fini.

On notera bien que l'on demande que A soit R -module de type fini (on dit souvent simplement R -module *fini*), et non pas R -algèbre de type fini. On dit souvent que A est une R -algèbre *finie*.

9.3.5 Proposition. *Les morphismes finis sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

9.3.6 Exercice. Montrez qu'une immersion ouverte est localement de type fini. Donnez un exemple d'immersion ouverte qui n'est pas quasi-compacte. Montrez qu'une immersion fermée est de type fini.

9.3.7 Proposition. *Tout morphisme fini est affine et à fibres finies (ensemblément).*

Démonstration : Un morphisme fini $f : X \rightarrow S$ est affine par définition. Comme une R -algèbre finie est clairement de type fini comme algèbre, on voit que f est aussi de type fini. Pour voir qu'il est quasi-fini, on se ramène au cas affine et il suffit de montrer que pour toute R -algèbre finie A , et pour tout corps résiduel $R \rightarrow \kappa$, le schéma $\text{Spec}(A \otimes_R \kappa)$ est ensemblistement fini. Soient x_1, \dots, x_r des générateurs de A comme R -module. Leurs images dans $A \otimes_R \kappa$ l'engendrent comme κ -espace vectoriel. En particulier $A \otimes_R \kappa$ est un anneau artinien, produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux artiniens dont le spectre est un point. Ceci conclut. □

9.4 Morphismes propres

La notion relative de compacité en topologie est celle d'application *propre*, ce qui désigne (au moins dans le cadre des espaces séparés localement compacts) une application continue telle que la préimage de tout compact est un compact. De même que pour la notion de séparation, la notion de compacité ne peut pas être transposée trop naïvement en géométrie algébrique. Par exemple, la définition « séparé et quasi-compact » ne suffit pas car l'espace affine \mathbb{A}_k^n sur un corps vérifie ces conditions sans posséder aucune des propriétés de finitude que l'on attend des objets compacts.

En fait, la bonne notion topologique de propreté est celle d'application continue universellement fermée (sans hypothèse localement compacte), comme on peut le lire dans Bourbaki, *Topologie Générale*, chap. I, § 10, no 3, prop. 7. On s'inspire de cette définition pour obtenir une notion de propreté fructueuse en géométrie algébrique.

9.4.1 Définition. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *universellement fermé* si pour tout $S' \rightarrow S$, le morphisme $f' : X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ obtenu après changement de base est fermé. On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$ est *propre* s'il est séparé, de type fini, et universellement fermé.

9.4.2 Proposition. *Les morphismes universellement fermés, resp. propres, sont stables par composition, changement de base, et localisation au but.*

Démonstration : Exercice. □

Voici un exemple relativement facile de morphisme propre.

9.4.3 Théorème. *Tout morphisme fini est propre.*

Démonstration : Il s'agit d'une formulation géométrique du théorème suivant de Cohen et Seidenberg (voir [Ei95], prop. 4.15) : *pour toute extension entière d'anneaux $R \rightarrow A$, tout premier $p \subset R$ et tout idéal $I \subset A$ tel que $I \cap R \subset p$, il existe un premier $q \subset A$ tel que $q \cap R = p$.* On rappelle qu'un morphisme d'anneaux $R \rightarrow A$ est *entier* si tout élément $x \in A$ est racine d'un polynôme unitaire non nul à coefficients dans R . D'après le théorème de Cayley-Hamilton ([Ei95], th. 4.3), toute R -algèbre finie est entière et nous pourrions donc appliquer le théorème de Cohen-Seidenberg. Passons à la preuve du théorème. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme fini, $Y \subset X$ un fermé, et $T = f(Y)$ son image ensembliste. Pour montrer que T est fermé, il suffit de le faire localement sur S . On peut donc remplacer S par un ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ et X par la préimage, qui est un ouvert affine $f^{-1}(U) = \text{Spec}(A)$ puisque f est affine. Alors $Y = V(I)$ pour un certain idéal I . Montrons que $f(Y) = V(I \cap R)$. Il s'agit de démontrer l'énoncé algébrique suivant : les premiers $p \subset R$ tels que $p = q \cap R$ pour un certain premier $q \subset A$ contenant I sont exactement les premiers contenant $I \cap R$. L'inclusion directe est immédiate et l'inclusion réciproque est le théorème de Cohen-Seidenberg. Nous obtenons ainsi que f est fermé. De plus, le morphisme $f' : X' \rightarrow S'$ déduit de f par un changement de base $S' \rightarrow S$ est encore fini, donc fermé d'après ce qui précède. Ainsi f est universellement fermé. (Et la preuve montre d'ailleurs que le résultat est vrai aussi pour les morphismes *entiers*, i.e. les $f : X \rightarrow S$ tels que pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(R)$ de S , la préimage $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert affine $V = \text{Spec}(A)$ et le morphisme $R \rightarrow A$ fait de A une R -algèbre entière.) □

9.5 Critères valuatifs

9.5.1 Préliminaires sur les anneaux de valuation. On trouvera dans [Mat89], §§ 10-11 les faits suivants. Rappelons d'abord qu'un *anneau de valuation* est un anneau intègre A tel que pour tout élément non nul x du corps de fractions K , on a $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$. Dans un anneau de valuation, l'ensemble des idéaux est totalement ordonné par inclusion. En particulier, un anneau de valuation est un anneau local. Un *anneau de valuation discrète* est un anneau de valuation dont l'idéal maximal est principal. Dans un tel anneau, on appelle *uniformisante* un générateur de l'idéal maximal, c'est-à-dire un élément premier de A . D'après [Mat89], th. 11.2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est un anneau de valuation discrète,
- (ii) A est un anneau local principal qui n'est pas un corps,
- (iii) A est un anneau local noethérien de dimension > 0 et son idéal maximal est principal,
- (iv) A est un anneau local noethérien de dimension 1 normal.

Les anneaux $k[X]_{(X)}$, $k[[X]]$ avec k un corps, $\mathbb{Z}_{(p)}$, \mathbb{Z}_p sont des exemples. Si $A \subset B$ est une inclusion d'anneaux locaux, on dit que B domine A si et seulement si $m_B \cap A = m_A$. Il est équivalent de dire que $m_A B \subset m_B$, on encore que l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux locaux, ou encore que le morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ envoie le point fermé sur le point fermé.

9.5.2 Lemme. *Soit A_0 un anneau local intègre noethérien de corps de fractions K_0 . Soit K/K_0 une extension de corps de type fini. Alors, il existe un anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et qui domine A_0 .*

Démonstration : Voir [GW20], lemma 15.6. □

9.5.3 Lemme. *Soit A un anneau de valuation de corps de fractions K . Soit $A \subset B \subsetneq K$ un sous-anneau strict de K , local, qui domine A . Alors $B = A$.*

Démonstration : Soit $x \in B$ un élément non nul. Comme $K = \text{Frac}(A)$, on peut écrire $x = r/s$ avec $r, s \in A$. Comme l'ensemble des idéaux de A est totalement ordonné, on a soit $rA \subset sA$, soit $sA \subset rA$. Dans le premier cas, il existe $t \in A$ tel que $r = st$. Alors $x = r/s = t \in A$. Dans le second cas, il existe $t \in A$ tel que $s = rt$. Alors $t \notin m_A$ car sinon $1 = rt/s = tx \in m_A B \subset m_B$, ce qui est impossible. Comme A est un anneau de valuation, on déduit que $t \in A^\times$ donc $x = 1/t \in A$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer les critères valuatifs de séparation et de propriété. Nous donnons une version valable sur un schéma de base noethérien pour nous limiter à la manipulation d'anneaux de valuation *discrète*, mais en utilisant des versions non noethériennes de 9.5.2 et 9.5.3 avec des anneaux de valuation généraux, on démontrerait sans beaucoup plus de mal les critères sur une base S quelconque.

9.5.4 Théorème (critère valuatif de séparation) Soit S un schéma noethérien, et soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est séparé,
- (2) pour tout anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow \text{!} & \downarrow f \\
 \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S,
 \end{array}$$

il existe au plus un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui rend tout le diagramme commutatif.

Le morphisme $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(A)$ du diagramme est bien sûr celui induit par l'inclusion $A \subset K$.

Avant de passer à la démonstration, rappelons que dans un schéma intègre X , de point générique η , l'anneau local $K := \mathcal{O}_{X,\eta} = \kappa(\eta)$ est un corps. Tous les anneaux de fonctions $\mathcal{O}_X(U)$ d'ouverts non vides, et tous les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$, sont intègres et de corps de fractions K . On appelle K les *corps de fonctions méromorphes* de X .

Démonstration : (1) \Rightarrow (2). Soit π une uniformisante de A , alors $K = A[1/\pi]$ donc $\text{Spec}(K) \subset \text{Spec}(A)$ s'identifie à l'ouvert $D(\pi)$, qui est schématiquement dense. Si $f : X \rightarrow S$ est séparé, il découle donc de la proposition 9.1.5 que deux S -morphisms $u, v : \text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui coïncident sur $\text{Spec}(K)$ sont égaux.

(2) \Rightarrow (1). Il suffit de montrer que la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée. Pour cela il suffit de montrer que l'image de Δ est fermée, cf exercice 7.3.9. Comme S est noethérien et f de type fini, alors X ainsi que $X \times_S X$ sont noethériens. Il en découle que Δ est quasi-compact, donc il suffit de montrer que $\Delta(X)$ est stable par spécialisation, d'après 9.2.9. Soit $t \in \Delta(X)$ un point, et $t \rightsquigarrow s$ une spécialisation. Soit Z le sous-schéma fermé réduit de support l'adhérence du point t , cf 8.2.4. C'est un schéma intègre, dont tous les anneaux locaux des points partagent le même corps de fractions, égal au corps résiduel $K = \kappa(t)$ de t . En particulier, on a l'inclusion $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,s} \subset K$. Dans cette situation, le lemme 9.5.2 affirme qu'il existe un anneau de valuation discrète $A \subset K$ qui domine \mathcal{O} , i.e. $\mathcal{O} \subset A$ et $m_A \cap \mathcal{O} = m_{\mathcal{O}}$. Ceci signifie que le morphisme

$$g : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow Z \rightarrow X \times_S X$$

envoie le point générique sur t et le point fermé sur s . Notons $p_1, p_2 : X \times_S X \rightarrow X$ les deux projections et $u_i = p_i \circ g$ pour $i = 1, 2$. Comme $t \in \Delta(X)$, les deux morphismes u_1, u_2 sont égaux en restriction à l'ouvert $\text{Spec}(K) \subset \text{Spec}(A)$. D'après la condition (2), ces morphismes sont égaux, ce qui signifie que g se factorise par la diagonale de X et $s \in \Delta(X)$. \square

9.5.5 Théorème (critère valuatif de propreté) Soit S un schéma noethérien, et soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas séparé et de type fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est propre,
- (2) pour tout anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S, \end{array}$$

il existe un unique morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui rend tout le diagramme commutatif.

Démonstration : (1) \Rightarrow (2). Pour tout carré commutatif comme dans (2), on notera $X_A = X \times_S \text{Spec}(A)$. On dispose d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X_A & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow f_A & & \downarrow f \\ & & \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S. \end{array}$$

On voit qu'il suffit de trouver une section $\text{Spec}(A) \rightarrow X_A$ du morphisme f_A , car la composition avec $X_A \rightarrow X$ fournira la flèche pointillée recherchée. En d'autres termes, quitte à remplacer X par X_A on peut supposer que $S = \text{Spec}(A)$ ce que nous faisons désormais. Soit x le point image de $\text{Spec}(K) \rightarrow X$.

Le point $\eta = f(x)$ est le point générique de $\text{Spec}(A)$, on a donc les inclusions $K = \kappa(\eta) \hookrightarrow \kappa(x) \hookrightarrow K$ ce qui montre que $\kappa(x) = K$. Soit Z l'adhérence de x dans X , muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. C'est un schéma intègre, de corps de fractions (le corps de fractions commun à tous les ouverts affines non vides de Z) égal à K . Comme f est universellement fermé, l'image de Z dans $S = \text{Spec}(A)$ est un fermé donc égal à S entier. Ceci implique qu'il existe $z \in Z$ dont l'image par f est égale au point fermé $s \in S$. On a une inclusion de sous-anneaux locaux $A = \mathcal{O}_{S,s} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ de K . Comme A est un anneau de valuation, il est maximal pour la relation de domination (lemme 9.5.3) donc $A = \mathcal{O}_{Z,z}$. Ceci fournit la section recherchée $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}) \rightarrow Z \hookrightarrow X$.

(2) \Rightarrow (1). On doit montrer que f est universellement fermé. Soit S'/S un morphisme de changement de base et $X' = X \times_S S'$. Considérons un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Par propriété universelle du produit fibré qui définit X' , le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ dont la condition (2) affirme l'existence se relève en un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X'$. Ceci démontre que $X' \rightarrow S'$ vérifie encore la condition (2). En conséquence, quitte à changer S en S' et X en $X' = X \times_S S'$, pour montrer que $f' : X' \rightarrow S'$ est fermé on peut supposer que $S' = S$. Soit $Z \subset X$ un fermé, vu comme sous-schéma fermé muni de la structure réduite. Soit $W \subset S$ son image par f . D'après la proposition 9.2.9, il suffit de montrer que W est stable par spécialisation. Notons $w = f(z)$ un point de W et soit $w \rightsquigarrow w'$ une spécialisation dans S ; on doit montrer que $w' \in W$. C'est une question topologique; on peut remplacer Z (resp. X) par l'adhérence de z dans Z (resp. dans X), et S par l'adhérence de w dans S , tous munis des structures de sous-schémas réduits. Alors Z et S sont intègres, de corps de fractions $K := \kappa(z)$ et $K_0 := \kappa(w)$. Comme w est une généralisation de w' , il appartient au schéma local $S_{w'} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$ qui est intègre. D'après le lemme 9.5.2, il existe un anneau de valuation discrète $A \subset K$ qui domine $\mathcal{O}_{S,w'}$. Notons σ le point fermé de $\text{Spec}(A)$; le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,w'})$ l'envoie sur w' . On se trouve avec un diagramme commutatif comme dans la condition (2). Par hypothèse, il existe un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow X$ qui complète le diagramme, et l'image z' de σ vérifie donc $f(z') = w'$. Ceci termine la démonstration. \square

9.5.6 Corollaire. *Soient S un schéma et n un entier. Alors l'espace projectif \mathbb{P}_S^n est propre sur S .*

Démonstration : Il suffit de montrer que $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$ est propre sur \mathbb{Z} . On sait qu'il est de type fini, car recouvert par les ouverts affines standard qui sont des espaces affines. Il reste à vérifier les critères valuatifs. Considérons un anneau de valuation discrète A de corps de fractions K et un diagramme carré commutatif comme celui présent dans les critères valuatifs. Quitte à remplacer X par $X \otimes_{\mathbb{Z}} A$ on se ramène à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_A^n \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & \text{Spec}(A). \end{array}$$

D'après la description des morphismes d'un schéma local vers l'espace projectif (voir 7.5.8), le morphisme g est donné par un $(n + 1)$ -uplet de coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ avec $x_i \in K$, l'un au moins d'entre eux étant non nul. On peut multiplier tous les x_i simultanément par un élément $a \in K^\times$ sans changer g . Après choix d'une uniformisante π pour A , un tel élément s'écrit $a = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$. Étendre g en un morphisme défini sur $\text{Spec}(A)$ veut dire trouver a tel que les $y_i = ax_i$ soient dans A , l'un d'entre eux étant inversible. Notons v_i la valuation de x_i et $v = \min(v_i)$. Aux inversibles de A près, l'extension est possible d'une unique manière en prenant $a = \pi^{-v}$. \square

9.6 Deux résultats sur les morphismes de schémas

Les différentes propriétés des morphismes introduites dans la partie 9 sont importantes avant tout parce qu'elles entretiennent des relations entre elles et permettent de dresser un paysage structuré de l'ensemble des morphismes. Nous présentons maintenant sans preuve deux résultats fondamentaux sur la structure des morphismes séparés quasi-compacts, qui illustrent cette réflexion et donneront peut-être à la lectrice / au lecteur l'envie d'en savoir plus.

Considérons la catégorie **QC** des morphismes de schémas $X \rightarrow S$ séparés et quasi-compacts; elle contient presque tous les schémas sur lesquels on se pose les questions les plus naturelles. Sous une hypothèse faible sur S , le théorème suivant affirme que tout objet de **QC** se factorise en une partie affine et une partie propre.

Théorème de décomposition de Temkin (2011). *Supposons S quasi-séparé (i.e. à diagonale quasi-compacte) et quasi-compact (par exemple noethérien). Alors tout morphisme séparé quasi-compact $X \rightarrow S$ possède une factorisation en un morphisme affine $X \rightarrow Y$ et un morphisme propre $Y \rightarrow S$.*

Notons **A**, resp. **P** la sous-catégorie pleine des morphismes affines, resp. propres. Le théorème de Temkin affirme donc que **A** et **P** engendrent **QC** d'une certaine manière. Pour compléter cette perception, il est utile de connaître $\mathbf{A} \cap \mathbf{P}$ pour savoir à quel point ces deux sous-catégories sont en « somme directe ». La réponse est apportée par le résultat suivant.

Théorème de Chevalley-Grothendieck (1961). *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes : f est fini ; f est propre et affine ; f est propre à fibres finies.*

Si l'on considère les morphismes finis comme « négligeables », on obtient donc une description assez claire. On peut penser à une factorisation $X \rightarrow Y \rightarrow S$ comme à une sorte de suite exacte⁽²⁾ et résumer les deux résultats précédents en termes approximatifs en disant qu'on a une extension

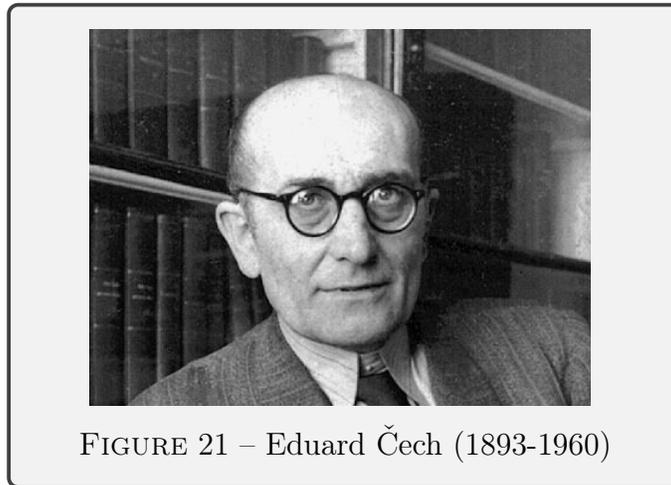
$$0 \rightarrow \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{QC}' \rightarrow \mathbf{P}' \rightarrow 0$$

où les « prime » désignent les catégories **A**, **QC**, **P** modulo les morphismes finis. (On peut donner un sens à ces catégories « prime », en revanche la suite exacte n'est qu'une image.)

2. Dans la catégorie des schémas en groupes de type fini sur un corps k , l'analogie avec la suite exacte n'est pas qu'une analogie, en vertu du théorème suivant dû à Barsotti et Chevalley : pour tout k -schéma en groupes de type fini G , il existe une suite exacte de schémas en groupes $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 1$ avec H affine et distingué, et A propre, lisse et géométriquement connexe sur k . Un tel A est appelé une *variété abélienne* sur k .

10 Algèbre homologique

Nous allons introduire et utiliser deux théories cohomologiques différentes : la *cohomologie de Čech* et la *cohomologie des foncteurs dérivés*. La première est plus facile à calculer, mais c'est la seconde qui possède les meilleures propriétés théoriques générales. Les deux sont distinctes en général, mais lorsque les faisceaux de coefficients sont quasi-cohérents elles coïncident au moins pour les schémas séparés, comme nous le démontrerons.



Voici un aperçu très bref de l'histoire sujet. Le développement de la cohomologie de Čech prend ses racines dans les travaux de Poincaré sur l'homologie (1895). Les aspects combinatoires sont explorés par Alexandroff (1925) et Čech (1932) qui introduisent les triangulations et le nerf des recouvrements. Au milieu du vingtième siècle apparaissent les faisceaux, introduits par Leray (1946). Par la suite, la théorie connaît une forte algébrisation avec la découverte de la technique des foncteurs dérivés par Cartan et Eilenberg (1956). La cohomologie des faisceaux arrive en géométrie algébrique à partir des années 1950 : c'est d'abord Serre (1955) qui montre comment adapter la cohomologie de Čech, puis Grothendieck (à partir de 1957) qui développe la cohomologie des foncteurs dérivés. L'évolution des théories cohomologiques (catégories dérivées, structures diverses : action de Galois, structures de Hodge...) et la profusion de leurs applications en géométrie algébrique s'est poursuivie sans interruption depuis, et elles restent l'un des outils les plus puissants dont on dispose.

Comment comprendre intuitivement la cohomologie ? La vérité est que l'égalité $d \circ d = 0$ qui définit un complexe d'objets d'une catégorie abélienne reste un mystère pour les mathématiciens, comme en témoignent les propos de Henri Cartan, Jean-Pierre Serre et John Gwyn Griffiths reproduits en épigraphe du livre [?], voir figure 23. Il est plus facile de comprendre intuitivement les idées qui motivent l'introduction du complexe de Čech ; la lectrice pourra lire avec profit l'introduction du chapitre 2 sur l'homologie dans le livre de Hatcher [?]. Pour cette raison, nous commencerons par présenter la cohomologie de Čech, plus concrète, avant de passer à la cohomologie des foncteurs dérivés. Aujourd'hui, on considère que la théorie la meilleure pour développer la théorie est celle des foncteurs dérivés, que l'on appelle souvent simplement *cohomologie*, et que la cohomologie de Čech est une sorte d'algorithme qui en permet le calcul dans les bonnes situations.



FIGURE 22 – Samuel Eilenberg (1913-1998)

10.1 Comment représenter un module ?

Toutes les branches des mathématiques, à commencer bien sûr par l’algèbre et la géométrie, sont irriguées par les techniques surpuissantes de l’algèbre linéaire. Lorsque les scalaires vivent dans un anneau commutatif unitaire A qui n’est pas un corps, les objets qui jouent le rôle des espaces vectoriels de dimension finie sont les *modules de type fini*. Leur étude est la généralisation naturelle de l’algèbre linéaire. L’objectif de ce paragraphe est de montrer comment, dans cette théorie, ont émergé les notions de *complexe de modules* et de *résolution d’un module*. Pour cela nous allons énoncer le théorème des syzygies de Hilbert, qui est l’un des points d’ancrage historique de l’algèbre homologique. Pour plus détails, la lectrice peut consulter [Ei95, 1.10].

Les modules de type fini les plus simples sont les modules libres $M \simeq A^n$. Pour eux, une bonne partie de l’algèbre linéaire habituelle s’étend sans grand changement : les morphismes entre modules libres sont représentés par des matrices, les endomorphismes ont un déterminant qui teste leur inversibilité, etc. Pour les modules quelconques, les choses ne sont pas si simples mais on peut essayer de se ramener à des modules libres de la manière suivante. Pour un module M donné, le choix d’une partie génératrice (de cardinal disons r) fournit une surjection depuis le module libre $L_0 = A^r$:

$$L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

(Nous anticipons un peu en utilisant les notations des suites exactes, voir déf. 10.2.5.) Si ce morphisme est injectif, $M \simeq L_0$ est libre et on a terminé. Sinon, on considère le noyau de $L_0 \rightarrow M$ qui (en supposant A noethérien ce que nous supposons pour simplifier) est encore de type fini. Le choix d’une partie génératrice de ce noyau fournit une surjection depuis un module libre L_1 . On obtient une suite exacte :

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On itère ensuite avec le noyau de $L_1 \rightarrow L_0$, etc. Lorsque A est l’anneau des polynômes, David Hilbert a fait une percée décisive que nous illustrons avec un exemple typique de module non libre, à savoir un module quotient de A :

$$A = k[x_1, \dots, x_n] \quad \text{et} \quad M = A/(x_1, \dots, x_n) = k.$$

Dans les cas de dimension $n = 1, 2, 3$, en menant les calculs avec soin pour choisir des générateurs « naturels » des noyaux, on voit que le procédé se termine :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{(x_1)} A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{(x_1 \ x_2)} A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{(x_1 \ x_2 \ x_3)} A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

10.1.1 Exercice (très instructif). Effectuez ces calculs.

10.1.2 Théorème (des syzygies de Hilbert, 1890) Soit k un corps. Tout module de type fini M sur l'anneau de polynômes $k[x_1, \dots, x_n]$ peut s'insérer dans une suite exacte de longueur $k \leq n$

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow L_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

où les L_i sont libres de type fini. Une telle suite exacte est appelée une résolution libre de M .

(La longueur maximale $k = n$ est atteinte pour le module $M = A/(x_1, \dots, x_n)$: on ne peut le mettre dans une suite exacte plus courte.) Une manière moderne de lire ce théorème est qu'il permet de remplacer M par l'objet $L_\bullet = (L_k \rightarrow \dots \rightarrow L_0)$, qui est plus agréable à manipuler car c'est un objet d'algèbre linéaire ; nous l'appellerons un *complexe*. La suite exacte de l'énoncé du théorème est une *résolution* de M par L_\bullet . Pour les modules sur des anneaux généraux, de telles résolutions libres ne sont pas toujours finies, mais cela importe peu et le développement ultérieur de l'algèbre homologique a montré (et les parties qui viennent vont montrer) le rôle capital joué par les complexes.

10.2 Catégories abéliennes

Pour tout schéma X , notons $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules sur X . Dans la suite du cours, nous allons étudier la cohomologie des faisceaux, qui fournit un cadre théorique général pour étudier certains foncteurs exacts d'un côté, comme les foncteurs

- de sections globales $\Gamma : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(A)$, où $A = \mathcal{O}_X(X)$,
- plus généralement, d'image directe $f_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_Y)$.

Le contexte catégorique adapté est celui des catégories dites *abéliennes*. La lectrice s'assurera facilement que les catégories $\text{Mod}(A)$ et $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ ainsi que les foncteurs Γ et f_* vérifient les axiomes de la définition suivante.

Avant la définition suivante, il est bon de relire la définition d'un objet zéro ; voir 4.1.14 et 4.1.15. Lorsqu'un tel objet existe, entre deux objets quelconques existe un unique *morphisme nul* et à chaque morphisme on peut associer des notions de *noyau* (voir 4.5.14) et de *conoyau* (voir 4.5.5).

10.2.1 Définition (Catégorie abélienne) Une catégorie \mathcal{C} est dite *abélienne* si :

1. les ensembles de morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sont munis de structures de groupes abéliens et les applications de composition sont bilinéaires ;
2. il existe un objet zéro ;
3. toute paire d'objets possède une somme et un produit ;
4. tout morphisme possède un noyau et un conoyau ;
5. tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme est un conoyau ;
6. pour tout morphisme u , la flèche $\text{coker } \ker u \rightarrow \ker \text{coker } u$ est un isomorphisme.

Si \mathcal{C}, \mathcal{D} sont deux catégories abéliennes, un *foncteur additif* est un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FM, FN)$ est un morphisme de groupes, pour tous objets $M, N \in \mathcal{C}$.

10.2.2 Remarques.

1. On peut montrer que cette définition est équivalente à celle de Hartshorne [Har77, III, § 1].
2. Les axiomes donnés ci-dessus sont redondants, mais il nous importe peu de donner une liste minimale. Sous cette forme, la définition permet d'avoir sous la main une liste des propriétés principales des catégories $\text{Mod}(A)$ et $\text{Sh}(X, \text{Mod}(\mathcal{A}))$.
3. Le premier et le dernier axiome sont conséquences des autres. Le premier axiome est spécial car c'est une structure supplémentaire et non une propriété ; mais on peut montrer qu'avec les axiomes 2 à 5, la loi d'addition sur les $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ existe et est unique. Il en résulte que le fait d'être abélienne est une *propriété*. Pour des détails, voir [?, chap. 2].
4. On peut montrer que la somme et le produit de deux objets A et B sont isomorphes. On appelle parfois cet objet commun le *biproduit* et on le note $A \oplus B$. Pour plus de détails, voir MacLane [Mac78, chap. VIII, § 2].

10.2.3 Exercice (Catégorie abélienne opposée). Démontrez que si \mathcal{C} est une catégorie abélienne, alors la catégorie opposée \mathcal{C}° est abélienne.

10.2.4 Exercice (Image et coimage).

1. Soit f un morphisme de A -modules. On définit l'*image* $\text{im}(f) = \ker(\text{coker}(f))$ et la *coimage* $\text{coim}(f) = \text{coker}(\ker(f))$. Démontrez qu'il existe un isomorphisme canonique $\text{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$. Mêmes questions avec un morphisme de faisceaux de \mathcal{A} -modules sur un espace topologique X . (En fait l'énoncé est vrai dans n'importe quelle catégorie abélienne.)
2. Soit \mathcal{C} la catégorie des groupes abéliens sans torsion. On rappelle que l'inclusion $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \text{Ab}$ possède un adjoint à gauche donné par le quotient sans torsion $F(M) = M/\text{Tors}(M)$, voir l'exercice 4.4.5. Démontrez que les noyaux et conoyaux de morphismes existent dans \mathcal{C} avec les formules $\ker_{\mathcal{C}}(f) = \ker_{\text{Ab}}(f)$ et $\text{coker}_{\mathcal{C}}(f) = F(\text{coker}_{\text{Ab}}(f))$. Démontrez que si $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est donné par $f(x) = 2x$, alors $\text{im}(f) = (0)$ alors que $\text{coim}(f) = \mathbb{Z}$.

Le théorème des syzygies 10.1.2 a montré l'importance de la notion de suite exacte, qui a un sens dans toute catégorie abélienne et que nous rappelons maintenant.

10.2.5 Définition (Suites exactes) Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. On appelle :

- *suite exacte* dans \mathcal{C} une suite d'objets et de morphismes

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

telle que $\text{im}(f_{i-1}) = \text{ker}(f_i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

- *suite exacte courte* une suite exacte de la forme $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$.

De nombreux foncteurs naturels préservent partiellement les suites exactes; voici les termes qui leur sont attachés.

10.2.6 Définition (Foncteurs exacts) Soient $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur additif. On dit que F est :

- *exact à gauche* s'il préserve les noyaux :

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \text{ exacte} \implies 0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \text{ exacte.}$$

- *exact à droite* s'il préserve les conoyaux :

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 \text{ exacte} \implies FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0 \text{ exacte.}$$

- *exact* s'il est exact à gauche et à droite :

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0 \text{ exacte} \implies 0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0 \text{ exacte.}$$

10.2.7 Remarque. Cette notion d'exactitude coïncide, dans le contexte des foncteurs additifs entre catégories abéliennes, avec la notion générale donnée en 10.5.6. Ces faits sont énoncés dans [Mac78], chapitre VIII, fin de la section 3. Dans la suite, nous utiliserons exclusivement la définition 10.2.6.

10.2.8 Exercice (Décomposer les suites exactes en suites exactes courtes). On considère une suite exacte $\cdots \rightarrow X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1} \rightarrow \cdots$ dont on note $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ les morphismes. En utilisant les suites exactes courtes $0 \rightarrow \text{ker}(f_i) \rightarrow X_i \rightarrow \text{im}(f_i) \rightarrow 0$, démontrez les faits suivants.

1. Un foncteur exact préserve les suites exactes de longueur arbitraire (éventuellement infinie).
2. Dans une suite exacte $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \cdots \rightarrow G_n \rightarrow 1$ de groupes finis, le produit alterné de cardinaux $\prod_{i=1}^n |G_i|^{(-1)^i}$ est égal à 1. (Ceci est vrai même si les G_i sont non abéliens.)
3. Dans une suite exacte $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_n \rightarrow 0$ d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k , la somme alternée de dimensions $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim(E_i)$ est égale à 0.

10.2.9 Exercice (Exemples de suites exactes à quatre termes).

1. Soient $a, b \geq 1$ entiers, d leur pgcd et m leur ppcm. On considère la suite de morphismes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \xrightarrow{i} (\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\Delta} (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \xrightarrow{p} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^* \longrightarrow 1$$

avec $i(r) = 1 + mr$, $\Delta(s) = (s, s)$ et $p(t, u) = tu^{-1}$. Montrez qu'il s'agit d'une suite exacte de groupes finis. Déduisez-en une formule pour $\varphi(ab)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

2. Soit A un anneau intègre et K son corps de fractions. Montrez que pour tout A -module M , de sous-module de torsion noté M_{tor} , on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M_{\text{tor}} \longrightarrow M \longrightarrow M \otimes K \longrightarrow M \otimes K/A \longrightarrow 0.$$

3. Soit $\mathbb{C}((z)) = \text{Frac}(\mathbb{C}[[z]]) = \{f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} f_n z^n \text{ pour un entier } N\}$ le corps de séries formelles de Laurent. Soient $D : \mathbb{C}((z)) \rightarrow \mathbb{C}((z))$ la dérivation et $\text{Res} : \mathbb{C}((z)) \rightarrow \mathbb{C}$ l'application résidu, définie par $\text{Res}(f) = f_{-1}$. Démontrez qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}((z)) \xrightarrow{D} \mathbb{C}((z)) \xrightarrow{\text{Res}} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

4. Soit (M, d) un module différentiel, voir définition 10.3.3. Démontrez qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H(M) \longrightarrow M/B(M) \xrightarrow{d} Z(M) \longrightarrow H(M) \longrightarrow 0.$$

10.2.10 Exercice (Hom est exact à gauche). Soit $\mathcal{C} = \text{Mod}(A)$. Démontrez les faits suivants :

1. Pour tout $P \in \mathcal{C}$, le foncteur $F = \text{Hom}(P, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est exact à gauche.
2. Pour tout $I \in \mathcal{C}$, le foncteur $F = \text{Hom}(-, I) : \mathcal{C}^{\circ} \rightarrow \mathcal{C}$ est exact à gauche. (*Comme ici F est contravariant, il est important de se rappeler des conventions de 4.2.3. Précisément, il faut montrer : $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ exacte $\Rightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}(Z, I) \rightarrow \text{Hom}(Y, I) \rightarrow \text{Hom}(X, I)$ exacte.*)
3. Il existe $P \in \mathcal{C}$ tel que $\text{Hom}(P, -)$ n'est pas exact à droite et il existe $I \in \mathcal{C}$ tel que $\text{Hom}(-, I)$ n'est pas exact à droite.
4. Mêmes questions dans une catégorie abélienne \mathcal{C} arbitraire.

10.2.11 Exercice (Le foncteur des points fixes est exact à gauche). Soient A un anneau et G un groupe. On note \mathcal{C} la catégorie des G - A -modules, c'est-à-dire les A -modules munis d'une action A -linéaire de G . (Lorsque A est un corps, il s'agit de représentations linéaires au sens usuel.)

1. Montrez que le foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(A)$ défini par $F(M) = M^G$, le sous- A -module des points fixes de G , est exact à gauche.
2. On suppose que A est un corps k et on prend le groupe $G = (k, +)$. On considère le G - k -module $M = k^2$ où G agit par $\lambda \cdot (a, b) = (a + \lambda b, b)$ (c'est l'action naturelle de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur k^2). Montrez que $N := \{(a, b) \in M; b = 0\}$ est une droite G -stable. Montrez que F n'est pas exact à droite en regardant son action sur la suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ de \mathcal{C} .

10.2.12 Exercice (Un foncteur exact à droite sans adjoint à droite). Soit Vect la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k . On considère l'espace vectoriel $E = k^{(\mathbb{N})} := \bigoplus_{n \geq 0} k$, sous-espace de $k^{\mathbb{N}} := \prod_{n \geq 0} k$ composé des familles $(x_n)_{n \geq 0}$ telles que tous les x_n sont nuls sauf un nombre fini. Enfin on note $F : \text{Vect} \rightarrow \text{Vect}$ le foncteur défini par $F(V) = \text{Hom}(E, V)$.

1. Démontrez que F est exact à droite.
2. Démontrez que F ne préserve pas les sommes directes infinies dénombrables, c'est-à-dire que l'application canonique $c : \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}(E, k) \rightarrow \text{Hom}(E, \bigoplus_{n \geq 0} k)$ n'est pas un isomorphisme. Pour cela, démontrez que l'image de c est composée des applications linéaires $E \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} k$ de rang fini ; en particulier $\text{id}_E \notin \text{im}(c)$. (*Indication : notez $H_n = \text{Hom}(E, k)$ le n -ième terme de la source de c . Quelle est l'image par c d'une forme linéaire $\varphi \in H_n$?*)

10.2.13 Exercice (Un foncteur exact à gauche sans adjoint à gauche, 1). On garde les notations de l'exercice précédent et on note $F : \text{Vect} \rightarrow \text{Vect}$ le foncteur défini par $F(V) = V \otimes_k E$.

- Démontrez que F est exact à gauche.
- Démontrez que F ne préserve pas les produits infinis dénombrables, c'est-à-dire que l'application canonique $d : (\prod_{n \geq 0} k) \otimes_k E \rightarrow \prod_{n \geq 0} (k \otimes_k E)$ n'est pas un isomorphisme. Pour cela, montrez que l'image de d est composée des familles $(v_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs $v_n \in k \otimes_k E = E$ qui engendrent un sous-espace de dimension finie. (*Indication : les vecteurs de la source de d sont des sommes finies de tenseurs élémentaires $a_i \otimes v_i$.*)

10.2.14 Exercice (Un foncteur exact à gauche sans adjoint à gauche, 2). Soit $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ la droite affine complexe et $x = 0$ son origine. On considère le foncteur fibre $F : \text{Sh}(X, \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_0$.

- Démontrez que F préserve les limites finies.
- Démontrez que F ne préserve pas les produits infinis dénombrables, en considérant les faisceaux $\mathcal{F}_n = \mathcal{O}_X^\times$ pour tout $n \geq 1$ et en démontrant que le morphisme $(\prod_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)_x \rightarrow \prod_{n \geq 1} \mathcal{F}_{n,x}$ n'est pas surjectif. (*Indication : notant $f_{n,x} \in \mathcal{F}_{n,x}$ le germe de la fonction $f_n = 1 - nx$, démontrez que la collection $(f_{n,x})$ ne provient pas d'un germe du faisceau $\mathcal{F} = \prod_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$.*)

10.3 Complexes

L'application d'un foncteur additif à une suite exacte fait perdre l'exactitude en général ; elle crée naturellement des objets plus généraux : les *complexes*.

10.3.1 Définition (Complexes) Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.

- Un *complexe (de cochaînes)* est une suite $M^\bullet = (M^\bullet, d)$ d'objets et de morphismes

$$\dots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M^i \xrightarrow{d_i} M^{i+1} \longrightarrow \dots$$

telle que $d_{i+1} \circ d_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Les d_i sont appelées *différentielles*. Un complexe est dit *positif* lorsque $M^i = 0$ pour $i < 0$ et *négatif* lorsque $M^i = 0$ pour $i > 0$.

- Un *morphisme de complexes* $f : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ est une collection de morphismes $f_i : M^i \rightarrow N^i$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & M^i & \xrightarrow{d_i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & N^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & N^i & \xrightarrow{d_i} & N^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

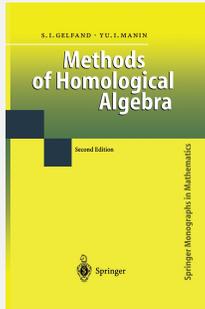
tels que $f_{i+1}d_i = d_i f_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

10.3.2 Remarque. La donnée de M^\bullet est équivalente à la donnée de l'objet \mathbb{Z} -gradué $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ muni de l'application graduée $d : \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ définie par $d|_{M^i} := d_i$, vérifiant $d^2 = 0$.

- Lorsque $\deg(d) = +1$, comme dans la définition 10.3.1, on parle de *complexe de cochaînes*. Un exemple est le complexe de de Rham $0 \rightarrow \Omega^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dots$

- Lorsque $\deg(d) = -1$, on parle de *complexe de chaînes*. Un exemple est fourni par les résolutions libres d'un module apparues dans le théorème des syzygies 10.1.2.

La convention habituelle est d'utiliser l'indexation en haut $M^\bullet = \bigoplus M^i$ pour les complexes de co-chaînes et l'indexation en bas $M_\bullet = \bigoplus M_i$ pour les complexes de chaînes.



... utinam intelligere possim rationationes pulcherimas quae e propositione concisa DE QUADRATUM NIHILO EXAEQUARI fluunt.

(... if I could only understand the beautiful consequence following from the concise proposition $d^2 = 0$.)

From Henri Cartan Laudatio on receiving the degree of Doctor Honoris Causa, Oxford University, 1980.

FIGURE 23 – Épigraphe du livre Gelfand et Manin, *Methods of homological algebra* [?]

Le défaut d'exactitude d'un complexe est mesuré à l'aide de sa *cohomologie*, qui est associée à la différentielle et à son intrigante propriété $d^2 = 0$ (voir figure 23). Pour présenter cette notion, la graduation ne joue pas de rôle et nous la laissons donc de côté jusqu'à la fin de cette sous-section.

10.3.3 Définition (Cohomologie des complexes) Soit (M, d) un *objet différentiel* de \mathcal{C} , c'est-à-dire un objet M muni d'un endomorphisme $d : M \rightarrow M$ tel que $d^2 = 0$. On note :

- $Z(M) = \ker(d)$ l'*objet des cocycles*,
- $B(M) = \text{im}(d)$ l'*objet des cobords*,
- $H(M) = Z(M)/B(M)$ l'*objet de cohomologie de M*.

La notation emprunte les initiales des mots allemands Zyklus, Begrenzung, Homologie. Par ailleurs, très souvent on notera avec la même lettre d les différentielles de tous les objets en présence, lorsque cela n'engendre pas de confusion.

Un *morphisme d'objets différentiels* $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$ est un morphisme $f : M \rightarrow M'$ tel que $d' \circ f = f \circ d$. Un morphisme d'objets différentiels envoie $Z(M)$ dans $Z(M')$ et $B(M)$ dans $B(M')$ et induit donc un morphisme en cohomologie

$$H(f) : H(M) \longrightarrow H(M').$$

Une des propriétés fondamentales de la cohomologie est son comportement par rapport aux suites exactes, que voici :

10.3.4 Lemme (du serpent). *Considérons le diagramme en traits pleins ci-dessous, qui représente un morphisme (α, β, γ) de complexes. On suppose que les deux lignes sont exactes. Alors, il existe une suite exacte indiquée en pointillés, où le morphisme ∂ est défini par $\partial(c) = (f')^{-1}\beta g^{-1}(c)$.*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \dashrightarrow & \ker f & \dashrightarrow & \ker \alpha & \dashrightarrow & \ker \beta & \dashrightarrow & \ker \gamma & \dashrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 & & \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
& & \text{coker } \alpha & \dashrightarrow & \text{coker } \beta & \dashrightarrow & \text{coker } \gamma & \dashrightarrow & \text{coker } g' & \dashrightarrow & 0
\end{array}$$

Démonstration :

□

10.3.5 Proposition. Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte d'objets différentiels d'une catégorie abélienne. Alors il existe un morphisme $\partial : H(M'') \rightarrow H(M')$ appelé morphisme connectant (connecting homomorphism en anglais) tel que le triangle suivant soit exact :

$$\begin{array}{ccc}
& H(M) & \\
H(i) \nearrow & & \searrow H(p) \\
H(M') & \xleftarrow{\partial} & H(M'')
\end{array}$$

c'est-à-dire qu'en chaque sommet, le noyau de la flèche qui part est égal à l'image de celle qui arrive.

Démonstration : Comme $B(M) = \text{im}(d) \subset \ker(d) = Z(M)$, la différentielle de M induit un morphisme dont le noyau et le conoyau sont la cohomologie (voir exercice 10.2.9.4) :

$$0 \rightarrow H(M) \rightarrow M/B(M) \xrightarrow{d} Z(M) \rightarrow H(M) \rightarrow 0.$$

La même chose vaut pour M' et M'' . En appliquant le lemme du serpent au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
M'/B(M') & \longrightarrow & M/B(M) & \longrightarrow & M''/B(M'') & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & Z(M') & \longrightarrow & Z(M) & \longrightarrow & Z(M'')
\end{array}$$

on obtient le morphisme connectant et l'exactitude annoncée.

□

Notons que pour un complexe de cochaînes $M^\bullet = \bigoplus M^i$, les modules $Z(M^\bullet)$, $B(M^\bullet)$ et $H(M^\bullet)$ sont gradués avec

$$Z^i(M^\bullet) := Z^i(M^i), \quad B^i(M^\bullet) := B(M^i), \quad H^i(M^\bullet) := H(M^i).$$

Si la suite de la proposition 10.3.5 est une suite exacte de complexes de cochaînes, la formule explicite pour le connectant (voir l'énoncé du lemme du serpent) montre que $\partial(H^i(M'')) \subset H^{i+1}(M')$. Le triangle exact prend donc la forme d'une suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow H^i(M') \longrightarrow H^i(M) \longrightarrow H^i(M'') \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(M') \longrightarrow \dots$$

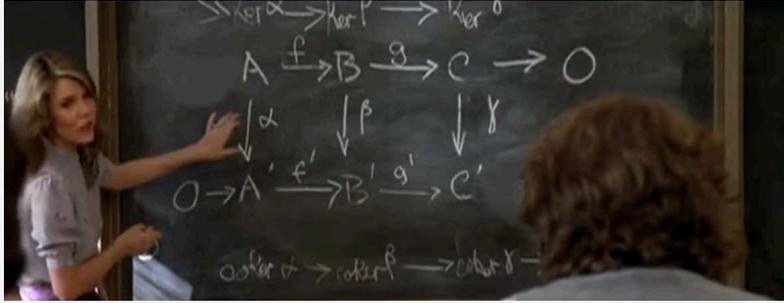


FIGURE 24 – Le lemme du serpent démontré par Jill Clayburgh dans le film *It's my turn* (1980)
 Pour voir la démonstration : <https://youtu.be/aXBNPjrvx-I>

10.3.6 Exercice. Une *homotopie* $h : f \rightarrow g$ entre deux morphismes $f, g : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ est une collection de morphismes $h_i : M^i \rightarrow N^{i-1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & M^i & \xrightarrow{d_i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \Downarrow & \swarrow h_i & \Downarrow & \swarrow h_{i+1} & \Downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & N^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & N^i & \xrightarrow{d_i} & N^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

tels que $f_i - g_i = d_{i-1}h_i + h_{i+1}d_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On dit que f et g sont homotopes s'il existe une homotopie entre eux. Dans ce cas ils induisent le même morphisme en cohomologie.

10.4 Résolutions

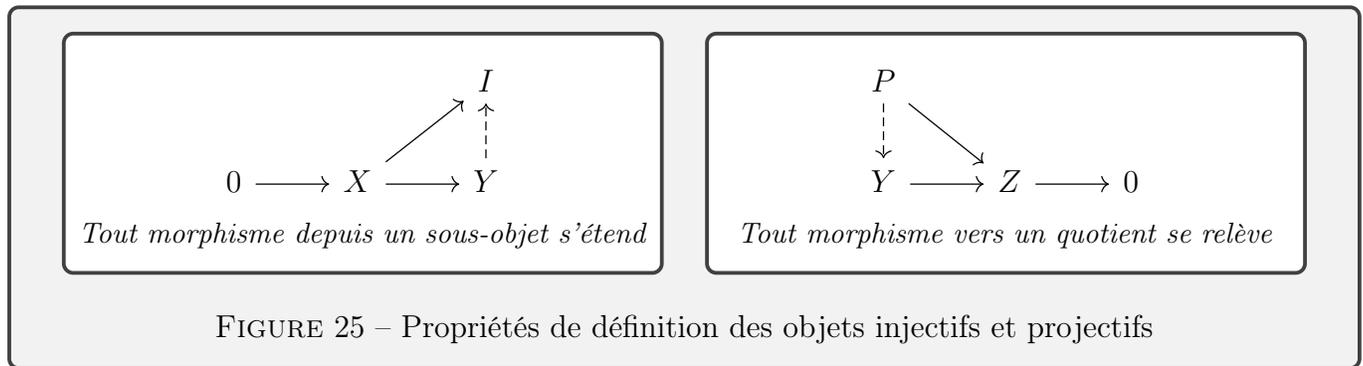
Nous introduisons maintenant les objets injectifs et projectifs, qui vont servir à « résoudre » les objets quelconques d'une catégorie abélienne.

10.4.1 Définition (Injectifs, projectifs) Soient I, P deux objets d'une catégorie abélienne \mathcal{C} . On dit que :

- I est *injectif* si $\text{Hom}(-, I)$ est exact.
- P est *projectif* si $\text{Hom}(P, -)$ est exact.
- \mathcal{C} possède assez d'injectifs si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un injectif I et un mono $X \hookrightarrow I$.
- \mathcal{C} possède assez de projectifs si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un projectif P et un épi $P \twoheadrightarrow X$.

10.4.2 Exercice (Cf figure 25). Compte tenu de l'exactitude à gauche (exercice 10.2.10), les objets I resp. P sont injectif resp. projectif si et seulement si $\text{Hom}(-, I)$ resp. $\text{Hom}(P, -)$ est exact à droite. Vérifiez que cela équivaut aux énoncés en apparence plus forts suivants :

1. L'objet I est injectif si et seulement si pour toute suite exacte $0 \rightarrow X \rightarrow Y$, tout morphisme $X \rightarrow I$ s'étend en un morphisme $Y \rightarrow I$.
2. L'objet P est projectif si et seulement si pour toute suite exacte $Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, tout morphisme $P \rightarrow Z$ se relève en un morphisme $P \rightarrow Y$.



10.4.3 Exercice (Projectif ssi facteur direct d'un libre). Soit A un anneau et P un A -module. Démontrez que P est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre, c'est-à-dire qu'il existe un module libre L et un module C tels que $L \simeq P \oplus C$.

La présence d'assez d'injectifs et de projectifs dans une catégorie abélienne est un fait crucial pour développer l'algèbre homologique. Pour l'heure, nous allons vérifier que c'est bien le cas dans la catégorie des A -modules.

10.4.4 Théorème. Soit A un anneau. Alors la catégorie $\mathcal{C} = \text{Mod}(A)$ possède assez de projectifs.

Démonstration : D'abord observons que tout module libre P est projectif. En effet, on peut écrire $P = \bigoplus_{j \in J} Ae_j$ où $(e_j)_{j \in J}$ est une base. Soit une suite exacte $Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ et un morphisme $u : P \rightarrow Z$. Par propriété des modules libres, la donnée de u équivaut à la donnée des images $z_j = u(e_j)$. Soit $y_j \in Y$ un élément qui relève z_j , alors le morphisme $v : P \rightarrow Y$ défini par $v(e_j) = y_j$ relève u , comme désiré. Or tout module est quotient d'un module libre : en effet, pour un module M on peut prendre le module libre de base M , noté $P = \bigoplus_{m \in M} Ae_m$ et considérer l'application surjective $P \rightarrow M$ qui envoie e_m sur m . On en déduit que \mathcal{C} possède assez de projectifs. \square

Pour démontrer que $\text{Mod}(A)$ possède assez d'injectifs, nous utiliserons un important théorème dû à Baer qui permet de simplifier la vérification du fait qu'un module I est injectif en se limitant aux suites exactes $0 \rightarrow X \rightarrow Y$ dans lesquelles $Y = A$ (et donc X est un idéal). Voici l'énoncé :

10.4.5 Théorème (Critère de Baer) Soit A un anneau. Un A -module I est injectif si et seulement si pour toute suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow A$, tout morphisme $\mathfrak{a} \rightarrow I$ s'étend en un morphisme $A \rightarrow I$.

Démonstration : La démonstration est un simple argument d'extension basé sur le lemme de Zorn. Nous renvoyons à Rotman [?, th. 3.30] ou Weibel [?, 2.3.1] pour les détails. \square

10.4.6 Théorème. *Soit A un anneau. Alors la catégorie $\mathcal{C} = \text{Mod}(A)$ possède assez d'injectifs.*

Démonstration : Supposons d'abord que $A = \mathbb{Z}$. Démontrons que dans ce cas, tout \mathbb{Z} -module divisible D est injectif. Pour cela, utilisons le critère de Baer 10.4.5. Considérons une suite exacte $0 \rightarrow (n) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow D$ et un morphisme $u : (n) \rightarrow D$. Comme D est divisible, il existe $d \in D$ tel que $u(n) = nd$; alors le morphisme $v : \mathbb{Z} \rightarrow D$ défini par $v(x) = dx$ étend u , ce qui conclut. Maintenant montrons que tout \mathbb{Z} -module M se plonge dans un injectif. Pour cela exprimons M comme quotient d'un module libre : $M = (\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}e_j)/N$. Celui-ci se plonge dans le module $D = (\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Q}e_j)/N$ qui est divisible car quotient d'un module divisible, voir 4.1.12. Comme un divisible est injectif, ceci conclut.

Passons au cas A quelconque. Dans l'exercice 4.4.11, à tout \mathbb{Z} -module D on a associé un A -module $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ où la structure de A -module est donnée par $(af)(x) = f(ax)$ pour tous $a \in A$ et $f : A \rightarrow D$, et la lectrice a démontré une adjonction :

$$\text{Hom}_A(X, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, D).$$

Ceci implique que si D est un \mathbb{Z} -module injectif, alors $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ est un A -module injectif : en effet, étant donné une suite exacte $0 \rightarrow X \rightarrow Y$ et un morphisme A -linéaire $u : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$, par adjonction il lui correspond un morphisme \mathbb{Z} -linéaire $u' : X \rightarrow D$, qui s'étend en un morphisme $v' : Y \rightarrow D$ par \mathbb{Z} -injectivité de D , et par adjonction de nouveau fournit une extension $v : Y \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ pour u . Nous allons utiliser ce fait pour montrer que tout A -module M se plonge dans un injectif. Pour chaque m on définit $\varphi_m : A \rightarrow M$, $\varphi_m(a) = am$. L'application $\varphi : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$, $m \mapsto \varphi_m$ est A -linéaire et injective car $m = \varphi_m(1)$. D'après la première partie de la démonstration (cas $A = \mathbb{Z}$) on peut plonger M dans un \mathbb{Z} -module injectif D , d'où un morphisme composé :

$$M \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D).$$

La dernière flèche est injective par exactitude à gauche de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)$, et le but est un A -module injectif d'après ce qui précède, d'où le plongement cherché. \square

10.4.7 Exercice (Les adjoints à droite préservent les injectifs). Revisitez la deuxième partie de la démonstration de 10.4.6 pour montrer plus généralement que l'adjoint à droite $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ d'un foncteur *exact* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ préserve les objets injectifs : $I \in \mathcal{C}$ injectif $\Rightarrow G(I) \in \mathcal{D}$ injectif.

10.4.8 Définition (Résolutions) Soit M un objet d'une catégorie abélienne \mathcal{C} .

- Une *résolution à gauche* de M est un complexe P_{\bullet} tel que $P_k = 0$ lorsque $k < 0$, avec un morphisme $P_0 \rightarrow M$ tel que la suite suivante est exacte :

$$\cdots \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0.$$

C'est une *résolution projective* si tous les P_k sont projectifs.

- Une *résolution à droite* de M est un complexe I^\bullet tel que $I^k = 0$ lorsque $i < 0$, avec un morphisme $M \rightarrow I^0$ tel que la suite suivante est exacte :

$$0 \xrightarrow{d} M \xrightarrow{d} I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \longrightarrow \dots$$

C'est une *résolution injective* si tous les I^k sont injectifs.

10.4.9 Corollaire. *Tout A -module M possède une résolution projective*

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

et une résolution injective

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

- objet projectif, objet injectif. Montrer que $\text{Mod}(A)$ en a assez.
- résolution. Homotopies. Foncteurs dérivés.
- δ -foncteur.

10.5 Exactitude (cas non abélien)

Cette sous-section est indépendante du reste du texte et sa lecture n'est pas strictement nécessaire pour le comprendre. Les seules notions dont nous aurons besoin concernant l'exactitude des foncteurs seront développées dans le contexte des catégories abéliennes, dans la sous-section 10.2 qui fournira également les exemples principaux pour nos applications.

Allons-y, pour le bénéfice de la lectrice intéressée.

10.5.1 Préservation des (co)limites. Les produits, produits fibrés, égalisateurs, noyaux apparaissent constamment en algèbre et ailleurs, et c'est donc une information très intéressante de savoir si un foncteur les préserve. Par exemple, dans la catégorie des A -modules, un morphisme $f : N_1 \rightarrow N_2$ est un noyau si et seulement s'il est injectif (il est alors le noyau de la projection $N_2 \rightarrow N_2/f(N_1)$). Pour un A -module M , demander si le foncteur de produit tensoriel par M préserve les noyaux revient à demander : si un morphisme $N_1 \rightarrow N_2$ est injectif, le morphisme induit $N_1 \otimes_A M \rightarrow N_2 \otimes_A M$ est-il injectif? C'est vrai pour certains M et faux pour d'autres. Pour un autre exemple, si une application continue d'espaces topologiques pointés $(X, x) \rightarrow (Y, y)$ est injective, le morphisme de groupes fondamentaux $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ est-il injectif d'image un sous-groupe distingué? Dualement, il est très intéressant de savoir si un foncteur préserve les sommes, coégalisateurs, et autres colimites.

La proposition qui suit énonce un fait remarquable : les foncteurs adjoints jouissent de telles propriétés de préservation pour les limites arbitraires ou les colimites arbitraires.

10.5.2 Proposition ([Le14, Th. 6.3.1]). Soit $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction. Alors :

1. *Le foncteur F préserve les colimites* : pour tout foncteur $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ tel que X et $F \circ X$ possèdent des colimites, l'application canonique $\text{colim } FX \rightarrow F(\text{colim } X)$ est un isomorphisme.
2. *Le foncteur G préserve les limites* : pour tout foncteur $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ tel que X et $G \circ X$ possèdent des limites, l'application canonique $G(\text{lim } X) \rightarrow \text{lim } GX$ est un isomorphisme.

(On dit aussi que F commute avec les colimites et G commute avec les limites.)

Si l'application canonique $\operatorname{colim} FX \rightarrow F(\operatorname{colim} X)$ de l'énoncé n'est pas claire pour la lectrice, elle pourra lire le détail de sa construction dans la remarque suivante avant de passer à la démonstration.

10.5.3 Remarque. Avec les notations de la proposition, soit $u : X \rightarrow \Delta_C$ la colimite de X . Par composition on obtient une transformation naturelle :

$$Fu : FX \longrightarrow F\Delta_C = \Delta_{F(C)}$$

entre foncteurs $I \rightarrow \mathcal{D}$. Par propriété universelle de la colimite $v : FX \rightarrow \Delta_{\operatorname{colim} FX}$, il existe un unique morphisme $f : \operatorname{colim} FX \rightarrow F(C) = F(\operatorname{colim} X)$ tel que $Fu = \Delta_f \circ v$.

Démonstration : Par dualité, il suffit de démontrer 1. Pour tout objet $D \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\operatorname{colim} F(X_i), D) &= \lim \operatorname{Hom}(F(X_i), D) \text{ par déf. 4.5.13(i) de la colimite,} \\ &= \lim \operatorname{Hom}(X_i, G(D)) \text{ par adjonction,} \\ &= \operatorname{Hom}(\operatorname{colim} X_i, G(D)) \text{ par déf. 4.5.13(i) de la colimite,} \\ &= \operatorname{Hom}(F(\operatorname{colim} X_i), D) \text{ par adjonction.} \end{aligned}$$

Ces isomorphismes étant fonctoriels en D , par le lemme de Yoneda ils proviennent d'un unique isomorphisme $f : \operatorname{colim} F(X_i) \rightarrow F(\operatorname{colim} X_i)$. Un petit exercice de déroulement des définitions, fastidieux mais sans difficulté, permet de voir qu'il s'agit du morphisme décrit dans 10.5.3. \square

10.5.4 Exercice (Les limites commutent avec les limites (et idem avec co-)). Soient I, J deux petites catégories. Supposons que dans \mathcal{C} , les limites de tous les foncteurs indicés par I ou J existent. Démontrez qu'alors les limites de tous les foncteurs $X : I \times J \rightarrow \mathcal{C}$ existent, et que l'on a des isomorphismes canoniques :

$$\lim_{i \in I} \lim_{j \in J} X_{i,j} \xrightarrow{\sim} \lim_{(i,j) \in I \times J} X_{i,j} \xleftarrow{\sim} \lim_{j \in J} \lim_{i \in I} X_{i,j}.$$

(Indication : procédez soit par calcul direct, soit par application de la proposition 10.5.2.)

10.5.5 Préservation des (co)limites finies. Les propriétés de 10.5.2 sont d'autant plus utiles que les adjoints abondent, comme nous l'avons vu dans la section 4.4. Il existe cependant de nombreux exemples de foncteurs qui ont un comportement intermédiaire : ils ne préservent pas les colimites arbitraires (resp. les limites arbitraires), mais préservent celles qui sont indicées par des catégories qui sont *finies* c'est-à-dire avec un nombre d'objets et de morphismes *finis*. Pour des exemples, nous renvoyons la lectrice aux exercices 10.2.12, 10.2.13, 10.2.14.

La préservation des limites ou colimites *finies* est de fait assez courante en algèbre et en géométrie, car les objets qu'on y étudie sont la plupart du temps définis par un nombre fini de données (par exemple : un ensemble muni de certaines lois internes...), satisfaisant un nombre fini d'axiomes (associativité, commutativité...), ou possédant des propriétés de finitude intrinsèques (être une algèbre de type fini sur un corps, être défini comme lieu de zéros d'un nombre fini de polynômes...). Non contente

d'être assez courante, cette propriété est assez utile, pour les mêmes raisons que précédemment : le plus souvent les (co)limites qui apparaissent en situation portent sur un nombre fini d'objets, vérifiant un nombre fini de relations entre eux ; bref, ce sont des (co)limites finies. En résumé, l'omniprésence de la finitude en géométrie algébrique amène naturellement la définition que voici.

10.5.6 Définition. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. On dit que F est :

- *exact à gauche* s'il préserve les limites finies,
- *exact à droite* s'il préserve les colimites finies.

Il n'est pas apparent à ce stade que les foncteurs exacts à droite ou à gauche ont des propriétés particulières et qu'il est possible de développer un arsenal de techniques très puissantes pour les étudier. Nous verrons ceci dans la deuxième partie du cours, dans le cas de foncteurs entre certaines catégories dites *abéliennes* (voir définition 10.2.1), où ces techniques portent le nom de *cohomologie*.

10.5.7 Des réciproques. Nous avons découvert trois propriétés importantes, ainsi reliées :

F possède un adjoint à gauche $\xrightarrow{(i)}$ F préserve les limites $\xrightarrow{(ii)}$ F est exact à gauche.

(On dispose bien sûr d'implications en version « à droite »). Pour terminer cette courte discussion de l'exactitude, voici quelques indications sur les implications réciproques.

(i) Sous certaines hypothèses qui affirment que les catégories en jeu ne sont pas « trop grosses », des théorèmes connus sous les noms de GAFT et SAFT (General / Special Adjoint Functor Theorem) établissent qu'un foncteur qui préserve les limites est un adjoint à gauche. Ces hypothèses sont peu contraignantes, de sorte qu'il est sage de garder en mémoire que dans la pratique le résultat est toujours vrai. Il est à noter toutefois que la construction des adjoints fournie par la démonstration de GAFT et SAFT n'a pas d'intérêt autre que pour établir l'existence ; même dans les cas où l'adjoint est connu, on peine à le reconnaître dans cette construction. On renvoie à [Le14, Th. 6.3.10 et 6.3.13] où ceci est discuté.

(ii) Ici aussi, on dispose d'un résultat permettant de comprendre l'implication réciproque :

10.5.8 Proposition. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur exact à gauche (c'est-à-dire qui préserve les limites finies). Si F préserve les produits, alors F préserve toutes les limites.

Démonstration : [Le14, Prop. 5.1.26]. □

Exemple, le foncteur sections globales, est exact à gauche mais pas à droite, c'est cette obstruction à relever globalement des choses qui se relèvent localement qui est riche géométriquement. C'est le point de départ de la cohomologie, qu'on verra dans la 2ème partie du cours.

Dans cet exemple, la catégorie en jeu est particulière, on dit *abélienne*, comme le sont les catégories de groupes abéliens ou modules, et faisceaux de groupes abéliens ou modules. Dans ces catégories, un foncteur additif est exact à gauche ssi il préserve les noyaux i.e. les injections (cf MacLane page 201). C'est la définition habituelle de foncteur exact à gauche.

11 Cohomologie de Čech

Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Pour chaque ensemble d'indices $\{i_0, \dots, i_p\}$ de I on notera $U_{i_0, \dots, i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$.

11.0.1 Définition. Soit $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X, \text{Ab})$ un faisceau de groupes abéliens sur X . Fixons un ordre total sur I . On définit un complexe de groupes abéliens $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ en posant, pour tout $p \geq 0$:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}).$$

avec les différentielles $d = d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ définies pour $\alpha = (\alpha_{i_0, \dots, i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par :

$$(d\alpha)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+1}}.$$

11.0.2 Remarques.

1. Deux précisions sur la formule dans le membre de droite :
 - (a) pour simplifier nous avons noté $\alpha_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+1}}$ au lieu de sa restriction à l'ouvert $U_{i_0, \dots, i_{p+1}}$,
 - (b) le chapeau signifie que l'indice situé dessous est omis.
2. Par exemple : $(d\alpha)_{i,j} = \alpha_j - \alpha_i$ si $\alpha \in C^0$ et $(d\alpha)_{i,j,k} = \alpha_{j,k} - \alpha_{i,k} + \alpha_{i,j}$ si $\alpha \in C^1$.
3. Il existe une variante utile, le complexe de Čech « total » $C_{\text{tot}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dans lequel C^p est indicé par *tous* les uplets $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$. Les deux approches sont essentiellement équivalentes ; pour la comparaison entre les deux, voir [Har77, III, Rem. 4.0.1] ou [?, Tag 01ED] et [?, Tag 01FG]. Avantages respectifs des deux complexes :
 - (a) le complexe ordonné est plus petit et donc plus agréable pour les calculs explicites ; dans les exemples I sera un ensemble fini $\{1, \dots, N\}$ muni de son ordre naturel ;
 - (b) le complexe total est plus intrinsèque, donc plus facile à utiliser pour certaines questions théoriques, par exemple lorsqu'on considère des raffinements de recouvrements.

11.0.3 Lemme. $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un complexe, i.e. $d \circ d = 0$.

Démonstration : Soit $\beta = d\alpha = (\beta_{i_0, \dots, i_{p+1}})$ avec $\beta_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+1}}$. On calcule :

$$\begin{aligned} (d\beta)_{i_0, \dots, i_{p+2}} &= \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k \beta_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+2}} \\ &= \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k \left(\sum_{l < k} (-1)^l \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i}_l, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+2}} + \sum_{l > k} (-1)^{l-1} \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, \widehat{i}_l, \dots, i_{p+2}} \right) \\ &= \sum_{k < l} ((-1)^{k+l} + (-1)^{k+l-1}) \alpha_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, \widehat{i}_l, \dots, i_{p+2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(d \circ d)(\alpha) = 0$. □

Par exemple, pour $d^1 \circ d^0$ nous avons $\beta = d\alpha$, $\beta_{i,j} = \alpha_j - \alpha_i$ puis

$$(d\beta)_{i,j,k} = \beta_{j,k} - \beta_{i,k} + \beta_{i,j} = (\alpha_k - \alpha_j) - (\alpha_k - \alpha_i) + (\alpha_j - \alpha_i) = 0.$$

11.0.4 Définition. Avec les notations précédentes, on appelle p -ième groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients dans \mathcal{F} relatif au recouvrement \mathcal{U} le groupe

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = h^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

11.0.5 Exemple. Soient A un anneau et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Calculons la cohomologie de la droite projective $X = \mathbb{P}_A^1$ à coefficients dans le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{F} = \mathcal{O}(n)$, relativement au recouvrement standard $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$. Rappelons que celui-ci est composé des deux droites affines $U_0 = \text{Spec}(A[x])$ et $U_1 = \text{Spec}(A[y])$ avec $y = 1/x$ (dans les notations de 6.3.7, on a $x = t_1/t_0$ et $y = t_0/t_1$). On a :

- $C^0 = \Gamma(U_0, \mathcal{F}) \times \Gamma(U_1, \mathcal{F}) = (t_0)^n A[t_1/t_0] \times (t_1)^n A[t_0/t_1]$,
- $C^1 = \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{F}) = (t_0)^n A[t_1/t_0, t_0/t_1]$,
- $d : C^0 \rightarrow C^1, ((t_0)^n f(t_1/t_0), (t_1)^n g(t_0/t_1)) \mapsto (t_1)^n g(t_0/t_1) - (t_0)^n f(t_1/t_0)$.

Calculons $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = \ker(d)$. Si $n \geq 0$, l'égalité $(t_1)^n g(t_0/t_1) = (t_0)^n f(t_1/t_0)$ implique que $(t_1)^n g(t_0/t_1)$ est un polynôme en t_1 donc $\deg(g) \leq n$, puis que $f(x) = x^n g(1/x)$. Ceci montre que $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = A[t_0, t_1]_{\deg=n}$ qui est un A -module libre de rang $n + 1$. Si $n = -m < 0$, cette même égalité fournit $(t_0)^m g(t_0/t_1) = (t_1)^m f(t_1/t_0)$. On voit qu'il ne peut exister de monôme $\mu \neq 0$ dans cette écriture, car en regardant le membre de gauche (resp. de droite) on aurait $\deg_{t_0}(\mu) > 0$, resp. $\deg_{t_0}(\mu) \leq 0$. Dans ce cas $f = g = 0$ et $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = 0$.

Calculons $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = \text{coker}(d)$. Le A -module libre C^1 a pour base l'ensemble des monômes $(t_0)^i (t_1)^j$ avec $i, j \in \mathbb{Z}$ et $i + j = n$. L'image de d est le sous-module libre de base le sous-ensemble des monômes tels que $i \geq 0$ ou $j \geq 0$ (puisque f, g sont des *polynômes*). Si $n \geq 0$, le conoyau de d est donc nul. Si $n = -m < 0$, le conoyau est égal au module libre de base $\{(t_0)^{-1} (t_1)^{-m+1}, (t_0)^{-2} (t_1)^{-m+2}, \dots, (t_0)^{-m+1} (t_1)^{-1}\}$ qui est de rang $m - 1 = -n - 1$. Voir figure 26.

En degré 0, la cohomologie de Čech est explicite et fournit le « bon » groupe de cohomologie :

11.0.6 Lemme. *Pour tout faisceau abélien \mathcal{F} sur X et tout recouvrement ouvert \mathcal{U} , on a :*

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration : Par définition $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(d : C^0 \rightarrow C^1)$. Un élément de $\ker(d)$ est une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$, $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$, telle que $\alpha_j - \alpha_i = 0$ pour tous i, j . D'après la condition de faisceau, ceci implique que les α_i se recollent en une unique section $\alpha \in \mathcal{F}(X)$. Ceci conclut. □

En degré 1, la cohomologie de Čech d'un recouvrement fixé peut être pathologique, mais la situation s'améliore si l'on prend en compte tous les recouvrements ouverts possibles de X . Pour ceci,

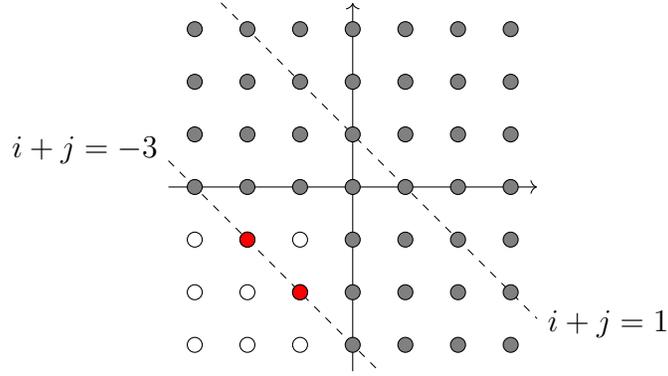


FIGURE 26 – Base du module $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = \text{coker}(d : C^0 \rightarrow C^1)$

on appelle *raffinement* de \mathcal{U} un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ muni d'une application $\lambda : J \rightarrow I$ telle que $V_j \subset U_{\lambda(j)}$ pour tout $j \in J$. (Si on travaille avec les complexes ordonnés, I et J sont munis d'ordres totaux et on doit supposer λ croissante.) On note alors $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ ce qui définit une relation d'ordre sur l'ensemble des recouvrements ouverts de X . On définit alors le *p-ième groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients dans \mathcal{F}* par :

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) := \text{colim}_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Dans la sous-section suivante, on construira un morphisme canonique

$$\text{can} : \check{H}^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

vers le *p-ième* groupe de cohomologie au sens des foncteurs dérivés. Dans certains cas favorables, ce morphisme sera un isomorphisme, par exemple si $p = 1$ (voir [Har77, II, Exercice 4.4] ou [?, Tag 09V0]) ou si X est un schéma séparé, voir ??.

Comment construire le morphisme *can*? Le point de départ pour faire le lien avec la cohomologie des foncteurs dérivés sera la *résolution de Čech* obtenue en faisceautisant le complexe de Čech.

11.0.7 Définition. On note $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le complexe de faisceaux abéliens défini par :

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0, \dots, i_p}})$$

où $f : U_{i_0, \dots, i_p} \hookrightarrow X$ est l'inclusion ouverte, avec différentielle $d : \mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{C}^{p+1}$ définie par la même formule que précédemment. On dispose d'un morphisme $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ obtenu en prenant le produit des morphismes d'adjonction $\mathcal{F} \rightarrow f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$.

11.0.8 Lemme. *Le complexe $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est une résolution de \mathcal{F} , c'est-à-dire qu'on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Démonstration :

□

11.1 Cohomologie de Čech des schémas affines

11.2 Cohomologie de Čech de l'espace projectif

12 Cohomologie des foncteurs dérivés

A Modules, algèbres et produit tensoriel

Dans cet appendice, nous introduisons la catégorie des modules sur un anneau commutatif et unitaire. Nous donnons quelques indications pour expliquer son importance dans le paragraphe A.0.5. Cette catégorie est un exemple type de la notion de *catégorie abélienne* qui a été dégagée pour donner un cadre théorique adapté au développement de l'homologie et la cohomologie dans diverses branches des mathématiques, et qui est présentée dans la section 10. Celle-ci tient le premier rôle dans l'étude des modules quasi-cohérents sur un schéma et leur cohomologie. Nos besoins concernant les modules se limitent à quelques définitions et notions élémentaires; le seul outil un peu plus sophistiqué qui nous sera nécessaire est le produit tensoriel. Pour ces raisons, nous nous contentons de brefs « rappels ». Pour plus de détails, nous renvoyons aux livres de Chambert-Loir [CL21, chapitres 3 et 8], Eisenbud [Ei95, § 0.3 et § A2.2] et Matsumura [Mat89, § 2 et Appendix A].

A.0.1 Définition. Soit A un anneau commutatif unitaire.

- Un A -module est un groupe abélien M muni d'une loi externe de multiplication par les éléments de A (souvent appelés *scalaires* dans ce contexte), que l'on peut voir comme une application $A \times M \rightarrow M$ vérifiant les axiomes habituels en algèbre linéaire, ou comme un morphisme d'anneaux unitaires $A \rightarrow \text{End}(M)$.
- Un *morphisme de A -modules*, ou *application A -linéaire*, est une application $f : M \rightarrow N$ telle que $f(am + a'm') = af(m) + a'f(m')$ pour tous $m, m' \in M$ et $a, a' \in A$.

On note $\text{Mod}(A)$ la catégorie des A -modules ainsi définie.

A.0.2 Exemples.

1. Un \mathbb{Z} -module est simplement un groupe abélien.
2. Un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module est un groupe abélien M tel que $n : M \rightarrow M, x \mapsto nx$ est l'endomorphisme nul (on écrit aussi : $nM = 0$).
3. Un $k[X]$ -module (k un corps) est un k -espace vectoriel M muni d'un endomorphisme k -linéaire $f : M \rightarrow M$ (à savoir, l'image de X par l'application $k[X] \rightarrow \text{End}(M)$).

A.0.3 Remarque. Lorsque A est un corps k , un module n'est rien d'autre qu'un espace vectoriel mais en général, la notion de module est bien plus riche et diverse. Les *modules libres* $M = A^{\oplus n} = A \oplus \cdots \oplus A$ sont les analogues des espaces vectoriels k^n , mais lorsque A n'est pas un corps les idéaux $I \subset A$ et les anneaux quotients A/I fournissent es exemples nouveaux. Un cas encore très simple est celui A est un anneau principal, car alors le théorème de structure dit que tout module ayant une partie génératrice finie est somme directe finie d'un module libre et de modules quotients A/I . Nous donnerons plus d'exemples, de nature géométrique, ci-dessous en A.0.5.3.

A.0.4 Notions de base. Nous utiliserons librement les notions et faits suivants :

1. sous-module $N \subset M$, quotient d'un module par un sous-module ;
2. sous-module engendré par une partie, module de type fini ;
3. produit et somme directe d'une famille de modules ;
4. module nul $M = 0$: c'est un objet zéro de $\text{Mod}(A)$;
5. noyau, image, théorèmes d'isomorphisme classiques ;
6. morphisme injectif, surjectif, bijectif : ce sont les monos, épis, isos de $\text{Mod}(A)$;
7. suite exacte, c'est-à-dire une suite de morphismes de A -modules

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

telle que $\text{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ pour tout i .

Les suites exactes sont revues dans un cadre plus général dans la section 10.

A.0.5 Intérêt de la catégorie $\text{Mod}(A)$. Si l'on est intéressé avant tout par l'étude de l'anneau A , la pertinence de la catégorie $\text{Mod}(A)$ tient au fait que c'est une catégorie que sa riche structure rend facile à étudier, et qui reflète fidèlement les propriétés de A . Entrons dans les détails.

1. Il s'agit d'une catégorie relativement simple à étudier, dans laquelle on dispose de nombreux outils permettant divers calculs, semblables à ceux connus lorsque A est un corps k . Les notions de dimension (ou rang), de matrices, de déterminants et de nombreuses autres, convenablement adaptées à partir du cas des corps, sont souvent aussi efficaces qu'en algèbre linéaire. Il est d'ailleurs fréquent d'utiliser l'expression *Algèbre linéaire* pour désigner l'étude des modules sur un anneau général.
2. La catégorie $\text{Mod}(A)$ détermine l'anneau A : pour deux anneaux commutatifs unitaires A et B , si $\text{Mod}(A)$ est équivalente à $\text{Mod}(B)$, alors A est isomorphe à B . Pour la signification précise de cet énoncé et pour sa démonstration, nous renvoyons à l'exercice 4.2.14. De cela, il découle que toutes les informations intéressantes sur A sont « contenues » dans $\text{Mod}(A)$.
3. Dans le point de vue géométrique, qui est évidemment celui qui est privilégié en théorie des schémas, on pense à l'anneau A comme à l'anneau des fonctions d'une variété algébrique affine X . De nombreux A -modules ont un sens géométrique :
 - (a) Les modules I et A/I sont liés aux sous-variétés $Y \subset X$: ce sont l'idéal des fonctions nulles sur Y , et l'anneau des fonctions sur Y , respectivement.
 - (b) Supposant A intègre de corps des fractions K , le module $M = \frac{1}{f}A \subset K$ est le module des fonctions méromorphes sur X , à pôle simple le long de l'hypersurface $f = 0$.
 - (c) Supposant pour fixer les idées que A est une k -algèbre, le module des dérivations $\text{Der}_k(A)$ et le module des 1-formes différentielles de Kähler $\Omega_{A/k}^1$ sont d'importance fondamentale pour étudier les propriétés différentielles de X .

A.0.6 Applications multilinéaires et produit tensoriel. On note

$$\text{Hom}_A(M, N)$$

le A -module des morphismes de modules entre M et N ; la multiplication par les scalaires $a \in A$ est définie par $af : M \rightarrow N, x \mapsto af(x)$. De même, on dispose du A -module

$$\text{Bilin}_A(M, N; P)$$

dont les éléments sont les *applications A -bilinéaires* $u : M \times N \rightarrow P$, concept tout à fait analogue à celui appris en algèbre linéaire sur un corps de coefficients.

A.0.7 Théorème. *Il existe un A -module $M \otimes_A N$, muni d'une application bilinéaire*

$$b : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$$

et appelé le produit tensoriel de M par N , possédant la propriété universelle suivante : pour toute application A -bilinéaire $u : M \times N \rightarrow P$, il existe un unique morphisme de A -modules $f : M \otimes_A N \rightarrow P$ tel que $u = f \circ b$. On obtient ainsi un isomorphisme de A -modules :

$$\text{Bilin}_A(M, N; P) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_A(M \otimes_A N, P).$$

Démonstration : On construit $M \otimes_A N$ comme le quotient du A -module libre engendré par les symboles $m \otimes n$ avec $m \in M$ et $n \in N$, par le sous-module engendré par les relations :

$$\begin{aligned} (m + m') \otimes n - m \otimes n - m' \otimes n \\ m \otimes (n + n') - m \otimes n - m \otimes n' \\ (am) \otimes n - m \otimes (an) \quad (a \in A). \end{aligned}$$

Ainsi un élément de $M \otimes_A N$ est une somme finie de « tenseurs élémentaires » de la forme $m \otimes n$. Nous renvoyons à [CL21, § 8.1], [Ei95, § A.2.2] ou [Mat89, App. A] pour une présentation détaillée. \square

Plusieurs propriétés élémentaires du produit tensoriel, telles que la commutativité (à isomorphisme près) : $N \otimes_A M \simeq M \otimes_A N$, l'associativité : $(M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$, ou la commutation avec les sommes directes, peuvent être trouvées dans les références fournies.

A.0.8 Algèbres et leurs produits tensoriels. En présence de structures multiplicatives, les concepts précédents s'étendent comme suit. Nous travaillons toujours avec des anneaux commutatifs unitaires et des morphismes qui envoient 1 sur 1.

A.0.9 Définition. Soit A un anneau commutatif unitaire.

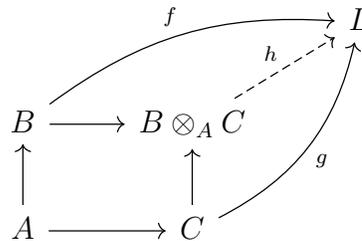
- Une *A -algèbre* est une paire (B, f) composée d'un anneau B et un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$. Le plus souvent on note simplement B au lieu de (B, f) .
- Un *morphisme de A -algèbres* entre (B, f_B) et (C, f_C) est un morphisme d'anneaux $u : B \rightarrow C$ tel que $u \circ f_B = f_C$.

On note $\text{Alg}(A)$ la catégorie des A -algèbres ainsi définie.

Soit B un anneau. Étant donnée une structure de A -algèbre $f : A \rightarrow B$ comme ci-dessus, la formule $a \cdot b := f(a)b$ définit sur B une structure de A -module telle que la multiplication $B \times B \rightarrow B$ est A -bilinéaire. Réciproquement, si B est muni d'une structure de A -module telle que la multiplication $B \times B \rightarrow B$ est A -bilinéaire, alors l'application $f : A \rightarrow B$ définie par $f(a) = a \cdot 1_B$ est un morphisme d'anneaux. On dispose ainsi de deux manières équivalentes de formuler la définition de A -algèbre.

A.0.10 Proposition. Soient B et C deux A -algèbres.

1. Le module produit tensoriel $B \otimes_A C$ peut être muni d'une unique structure de A -algèbre telle que $(b_1 \otimes c_1) \cdot (b_2 \otimes c_2) = b_1 b_2 \otimes c_1 c_2$.
2. Les applications $u : B \rightarrow B \otimes_A C$, $u(b) = b \otimes 1$ et $v : C \rightarrow B \otimes_A C$, $v(c) = c \otimes 1$ sont des morphismes de A -algèbres.
3. Pour toute A -algèbre L et pour tout couple de morphismes de A -algèbres $f : B \rightarrow L$, $g : C \rightarrow L$, il existe un unique morphisme de A -algèbres $h : B \otimes_A C \rightarrow L$ tel que $f = h \circ u$ et $g = h \circ v$.



Démonstration : Nous nous contentons d'une esquisse et renvoyons à [Mat89, App. A] pour des détails. L'application $f : B \times C \times B \times C \rightarrow B \otimes_A C$ définie par $f(b_1, c_1, b_2, c_2) = b_1 b_2 \otimes c_1 c_2$ est A -bilinéaire en (b_1, c_1) et en (b_2, c_2) donc par deux applications de la propriété universelle du module produit tensoriel, elle induit une application $(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \rightarrow B \otimes_A C$. On vérifie que ceci fait de $B \otimes_A C$ une A -algèbre vérifiant les propriétés annoncées. \square

A.0.11 Exercice. Soient X, Y deux indéterminées.

1. Démontrez que la A -algèbre $A[X] \otimes_A A[Y]$ est isomorphe à $A[X, Y]$.
2. Soient m, n deux entiers naturels et d leur pgcd. Démontrez que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

A.0.12 Changement de base, ou extension des scalaires. Le produit tensoriel des modules donne naissance à la notion fondamentale de *changement de base*, aussi appelée *extension des scalaires*. Avant de la décrire, nous en expliquons l'idée : dans la théorie des schémas, qui permet de considérer des objets géométriques tels que « le lieu des zéros de m polynômes P_1, \dots, P_m en n variables à coefficients dans un anneau A », les anneaux favorisés sont les A -algèbres de type fini telles que $A[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m)$. Dans une telle algèbre, on fait jouer un rôle différent aux éléments de A (les coefficients, ou scalaires) et aux éléments X_i (les variables). C'est pour souligner ce rôle particulier que va jouer A qu'on l'appelle *l'anneau de base*, ou *anneau des scalaires*.

Voici concrètement ce dont il s'agit. Soit $A \rightarrow A'$ un morphisme d'anneaux.

1. Soit M un A -module. Le A -module $M \otimes_A A'$ est muni d'une structure naturelle de A' -module définie par $a' \cdot (m \otimes a'') := m \otimes (a' a'')$. On dit que $M \otimes_A A'$ est le *A' -module obtenu à partir de M par changement de base, ou par extension des scalaires, le long de $A \rightarrow A'$* . On obtient un foncteur de changement de base :

$$- \otimes_A A' : \text{Mod}(A) \longrightarrow \text{Mod}(A').$$

2. Soit B une A -algèbre. L'anneau $B \otimes_A A'$ est muni d'une structure de A' -algèbre, et on obtient un foncteur de changement de base :

$$- \otimes_A A' : \text{Alg}(A) \longrightarrow \text{Alg}(A').$$

On trouvera dans 4.4.10 et 4.4.11 deux autres propriétés du produit tensoriel.

A.0.13 Exercice (Changement de base dans une algèbre de présentation finie). Soit B une A -algèbre de la forme $B = A[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m)$. Démontrez que

$$B \otimes_A A' \simeq A'[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m).$$

Références

- [AM04] ÉRIC AMAR, ÉTIENNE MATHERON, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.
- [Aw06] STEVE AWODEY, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006.
- [CL21] ANTOINE CHAMBERT-LOIR, *(Mostly) Commutative Algebra*, Universitext, Springer, 2021.
- [DPP10] APÓSTOLOS DOXIÁDIS, CHRISTOS PAPADIMITRIOU, ALECOS PAPADATOS, *Logicomix*, Vuibert, 2010.
- [DW82] RICHARD DEDEKIND, HEINRICH WEBER, *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math. 92 (1882), 181–290. Édition en langue anglaise : *Theory of algebraic functions of one variable*, Hist. Math., 39. American Mathematical Society, 2012.
- [EH00] DAVID EISENBUD, JOE HARRIS, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Math., 197. Springer-Verlag, 2000.
- [Ei95] DAVID EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., Springer, 1995.
- [Gl81] GEORGES GLAESER, *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherches en didactique des mathématiques 2(3), 303-346, 1981.
- [GW20] ULRICH GÖRTZ, TORSTEN WEDHORN, *Algebraic Geometry 1, Schemes with examples and exercises*, Springer Studium Mathematik, Springer Spektrum, 2020.
- [Hal67] PAUL HALMOS, *Introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, 1967.
- [Har77] ROBIN HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Hi93] MARC HINDRY, *Géométrie arithmétique*, Chabert, Jean-Luc (ed.) et al., Analyse diophantienne et géométrie algébrique. Exposés du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, Cah. Sémin. Hist. Math., 2. Sér. 3, 79-84, 1993.
- [Kr82] LEOPOLD KRONECKER, *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraische Grössen*, J. Reine Angew. Math. 92 (1882), 1–122.
- [La99] TSIT YUEN LAM, *Lectures on modules and rings*, Graduate texts in mathematics 189, Springer, 1999.
- [Le14] TOM LEINSTER, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 143, Cambridge University Press, 2014.

- [LS22] BERNARD LE STUM, *Algèbre commutative et géométrie algébrique*, cours de master 1, Université de Rennes, 2002. Polycopié accessible à l'adresse https://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Enseignement_files/ACGA.pdf.
- [Mac78] SAUNDERS MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. no. 5, Springer-Verlag, 1978.
- [Mat89] HIDEYUKI MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. 8, Cambridge University Press, 1989.
- [Mu99] DAVID MUMFORD, *The red book of varieties and schemes*, Second edition, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer-Verlag, 1999.
- [Pe01] DANIEL PERRIN, *Géométrie Algébrique, une introduction*, EDP Sciences - CNRS éditions, 2001. Édition en anglais : *Algebraic geometry. An introduction*, Universitext, Springer, EDP Sciences, 2008.
- [Ra22] LORENZO RAMERO, *Grimoire d'algèbre commutative*, Les Presses insousmises, 2022. Accessible à l'adresse https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/lorenzo_ramero/The-Grimoire-Project.html.
- [Wed16] TORSTEN WEDHORN, *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*, Springer Studium Mathematik, Springer Spektrum, 2016.