

Contrôle continu (durée deux heures)
 (le 26/10/2017)

Nom :
Prénom :
Groupe :

Documents, téléphones et calculatrices interdits

Exercice 1. *Question de cours.* (1 pt) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Quelle est la forme algébrique du nombre complexe $z = r e^{i\theta}$?

 $z =$

1.1) (1 pt) Ecrire sous sa forme algébrique le nombre complexe qui est de module 2 et d'argument $\pi/3$.

 $z =$

1.2) (1 pt) Ecrire sous sa forme algébrique le nombre complexe $z = (3 + 6i)/(3 - 4i)$.

 $z =$

Exercice 2. *Question de cours.* (1 pt) Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comment se calcule le module de z élevé au carré ?

 $|z|^2 =$

2.1) (2 pts) Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} =$$

$$v = 1 - i =$$

2.2) (1 pt) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $w = u/v$ suivant :

$$w = \frac{u}{v} =$$

Exercice 3. *Question de cours.* (1 pt) Soit n un entier non nul. Indiquer ci-dessous quelles sont les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$w_0 = \quad w_1 = \quad w_2 = \quad \cdots \quad w_{n-1} =$$

3.1) (1 pt) Déterminer les formes exponentielles, notées u_j avec $j \in \{0, 1, 2\}$, associées aux racines cubiques du nombre complexe $2 - 2i$.

$$u_0 =$$

$$u_1 =$$

$$u_2 =$$

3.2) (1 pt) Exprimer $u_0^2 = u_0 \times u_0$ en fonction de u_1 et de u_2 .

$$u_0^2 =$$

Exercice 4. *Question de cours.* (2 pts) On considère le polynôme suivant :

$$P(X) := X^3 - 2X^2 - 11X + 12 \in \mathbb{R}[X].$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Que signifie l'affirmation selon laquelle " x est racine de P mais n'est pas une racine double de P "?

4.1) (1 pt) Parmi les valeurs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, laquelle (notée x_1) est racine de P ?

$$x_1 =$$

4.2) (1 pt) Effectuer la division de $P(X)$ par $X - x_1$ et afficher le résultat :

$$Q(X) := P(X)/(X - x_1) =$$

4.3) (1 pt) Déterminer les racines x_2 et x_3 de $Q(X)$:

$$x_2 =$$

$$x_3 =$$

Exercice 5. *Question de cours.* (1 pt) Donner un exemple de polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 qui n'est pas un produit de deux facteurs linéaires, c'est à dire un produit de deux polynômes de degré 1 choisis dans $\mathbb{R}[X]$.

$$P(X) =$$

5.1) (1 pt) Soient $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. En effectuant la division euclidienne du polynôme $A(X) := X^4 + X^2 + bX + c$ par $B(X) := X^2 + X + 1$, déterminer le quotient $Q(X)$ et le reste $R(X)$.

$$Q(X) =$$

$$R(X) =$$

5.2) (1 pt) Déterminer b et c de façon à ce que $A(X)$ soit divisible par $B(X)$.

$$b =$$

$$c =$$

Exercice 6. On considère les fonctions :

$$\begin{array}{ll} f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathcal{D}(g) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \frac{5x^2 + x - 4}{x^2 - 1}, & x \longmapsto g(x) = \frac{5x - 4}{x - 1}. \end{array}$$

6.1) (1 pt) Quels sont les domaines de définition $\mathcal{D}(f)$ et $\mathcal{D}(g)$ des fonctions f et g ?

$$\mathcal{D}(f) =$$

$$\mathcal{D}(g) =$$

6.2) (1 pt) Montrer que f est la restriction de g à $\mathcal{D}(f)$, c'est à dire que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}(f)$.

6.3) (2 pts) Déterminer les images $Im(g)$ et $Im(f)$ de g et de f .

$$Im(g) = g(\mathcal{D}(g)) =$$

$$Im(f) = f(\mathcal{D}(f)) =$$