

## Chapitre 4 : Intégration

### Intégrale et aire

**Exercice 4.1.** Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

$$(a) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx; \quad (b) \int_{-1}^3 |x-2| \, dx.$$

$$(a) \text{ Demi-disque de rayon 2, aire } = \frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi \quad (b) \text{ Deux triangles : aire } \frac{3^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 5$$

### Tableau de primitives

**Exercice 4.2.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes.

$$(a) (3x^2 + 4x - 2) \quad (b) \sqrt{3x-1} \quad (c) \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(d) \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \quad (e) e^{2x+3} \quad (f) 2^{-x} \quad (g) (e^x - 3x^2) \cdot \cos(e^x - x^3)$$

Dans toutes les solutions de cette feuille, la constante d'intégration “+C” dans les primitives est supprimée. (b)  $F(x) = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}$ , (c)  $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ , (d)  $F(x) = \sqrt{2x+3}$  (e)  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3}$  (f)  $= e^{-x \cdot \ln(2)}$ , donc  $F(x) = \frac{-1}{\ln(2)} \cdot 2^{-x}$  (g)  $F(x) = \sin(e^x - x^3)$

### Linéarisation

**Exercice 4.3.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) (x^3 - 2)^2 \quad (b) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)^2 \quad (c) \cos^2(x) \quad (d) \sin(2x) \cdot \sin(5x)$$

$$(a) F(x) = \frac{x^7}{7} - x^4 + 4x, \quad (b) F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad (c) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \text{ donc } F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x) \quad (d) = \frac{-1}{2}(\cos(7x) - \cos(3x)) \text{ donc } F(x) = \frac{-1}{14} \sin(7x) + \frac{1}{6} \sin(3x)$$

### Intégrales impropres

**Exercice 4.4.** Dans certains cas, on peut définir une intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  même si  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas au domaine de définition de  $f$  ! Dans tous les cas suivants, décider si l'expression a un sens, et si oui, déterminer sa valeur numérique :

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (c) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (d) \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (e) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(a) = \frac{1}{2} \text{ Dessiner le graphe et montrer la région non-bornée d'aire finie. } \quad (e) = 2$$

### Intégration par parties

**Exercice 4.5.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) x \cdot \sin(x) \quad (b) x^2 \cdot \cos(3x) \quad (c) \arctan(x) \quad (d) e^x \sin(x)$$

$$(a) F(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x) \quad (b) F(x) = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right) \sin(3x) + \frac{2}{9}x \cos(3x) \quad (c) \text{ avec } u' = 1, \\ v = \arctan(x), \text{ on obtient } F(x) = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad (d) \text{ iip deux fois. } F(x) = \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x))$$

**Exercice 4.6.** Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^2 x^2 \cdot e^x dx \quad (b) \int_1^e x \cdot (\ln(x))^2 dx$$

$$(a) \text{ Deux fois iip. } F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x. \text{ Réponse } 2e^2 - 2. \quad (b) \text{ Deux fois iip. } F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln^2(x) - \int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2(\ln^2(x) - \ln(x) + \frac{1}{2}). \text{ Réponse } \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

### Changement de variables

**Exercice 4.7.** Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int_3^4 x(x^2 - 6)^{\frac{4}{3}} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^7(x) dx \quad (c) \int_2^3 x \cdot \exp(x^2 - 2) dx$$

$$(a) u = x^2 - 6, F(x) = \frac{3}{14}(x^2 - 6)^{\frac{7}{3}}. \int = \frac{3}{14}(10^{\frac{7}{3}} - 3^{\frac{7}{3}}). \int = \frac{1}{8}. \quad (b) u = \sin(x), F(x) = \frac{1}{8} \sin^8(x). \quad (c) u = x^2 - 2, F(x) = \frac{1}{2} \exp(x^2 - 2), \int = \frac{1}{2}(\exp(7) - \exp(2)).$$

**Exercice 4.8.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) 3x^2(x^3 + 4)^{20} \quad (b) \frac{x^2}{2x^3 + 5} \quad (c) x^2 \cos(2x^3) \\ (d) \frac{\cos(\ln(x))}{x} \quad (e) \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}}$$

(a)  $F(x) = \frac{1}{21}(x^3 + 4)^{21}$ . (b) Déf pour  $x \neq -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ .  $F(x) = \frac{1}{6} \ln(|2x^3 + 5|)$ . (c)  $F(x) = \frac{1}{6} \sin(2x^3)$ . (d)  $F(x) = \sin(\ln(x))$ . (e)  $F(x) = \sqrt{e^x + 3}$ .

**Exercice 4.9.** A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

(a)  $\int_0^2 x^2 \exp(x^3) dx$  (b)  $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) dx$  (c)  $\int_0^\pi \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx$   
 (d)  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2 + 2} dx$

(a)  $F(x) = \frac{1}{3} \exp(x^3)$ .  $\int = \frac{1}{3}(\exp(8) - 1)$  (b) Un peu plus difficile ! Avec  $u(x) = \cos(x)$ , on trouve  $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos^2(x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)(1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) dx = -\int_1^0 (1 - u^2)u^2 du = -[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5]_1^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ . (c)  $u(x) = \sin(x)$ , primitive  $F(x) = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}}(x)$ .  $\int = 0$ . Le fait que l'intégrale vaut 0 se voit aussi par un argument de symétrie. (d) Motivation : on connaît déjà une primitive de  $\frac{1}{x^2+1}$  ! Or,  $\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}$ . On choisit donc  $u(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ . Primitive  $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$ .  $\int = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

### Intégration des fractions rationnelles

**Exercice 4.10.** (Comparer avec l'exercice 2.14) En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a)  $\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-3)}$ . Primitive  $-\frac{1}{2} \ln(|x-1|) + \frac{1}{2} \ln(|x-3|) = \ln(\sqrt{|\frac{x-3}{x-1}|})$  (b)  
 $\frac{3x-11}{x^2-5x+6} ; = \frac{5}{x-2} - \frac{2}{x-3}$  (c)  $\frac{2x^3-9x^2+10x-5}{x^2-5x+6} ; = 2x+1 + \frac{5}{x-2} - \frac{2}{x-3}$

### Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

**Exercice 4.11.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a)  $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$  (Indication :  $u = e^x$ .) (b)  $\frac{1}{\tan(x)(\sin(x) + 1)}$  (Indication :  $u = \sin(x)$ .)  
 (c)  $\frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2}$  (Indication :  $u = e^x$ .)  
 (a)  $F(x) = \arctan(e^x)$  (b) Défini pour  $x \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$ .  $\int_a^b \frac{1}{\tan(x)(\sin(x)+1)} = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} \frac{1}{u(u+1)} du = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du \dots$  donc  $F(x) = \ln(|\frac{\sin(x)}{\sin(x)+1}|)$  (c) défini pour  $e^x \notin \{1, -2\}$ , c.à.d. pour  $x \neq 0$ .  
 $F(x) = \frac{1}{3} \ln(|\frac{e^x+2}{e^x-1}|)$

### Resumé des techniques d'intégration

**Exercice 4.12.** Calculer les intégrales suivantes :

- (a)  $\int_{-1}^1 x \cdot \arctan(x) \, dx$  (Indication : intégration par parties, et utiliser  $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ .)  
 (b)  $\int_0^1 \arccos(x) \, dx$  (Indication : intégration par parties.)  
 (c)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x) \cos^3(x) \, dx$ .

(a) Primitive  $\frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) = \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan(x) - \frac{x}{2}$ . Donc  $\int = \frac{\pi}{2} - 1$  (b)  $\int \arccos(x) \, dx = x \cdot \arccos(x) - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ .  $\int = 1$ . Ce dernier résultat peut être aussi obtenu par un simple argument géométrique :  $\int_0^1 \arccos(x) \, dx = \int_0^\pi \cos(x) \, dx = 1$ . (c) Avec  $u = \sin(x)$  et en utilisant  $\cos^2 = 1 - \sin^2$  on obtient la primitive  $\frac{1}{4} \sin^4(x) - \frac{1}{6} \sin^6(x)$ .  $\int = \frac{1}{16} - \frac{1}{48} = \frac{1}{24}$ .

**Exercice 4.13.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

- (a)  $\cos(2x) \cos(3x)$  (b)  $\frac{\ln^3 x}{x}$  (c)  $\ln(x^2 - 1)$  (Indication :  $v' = 1$ .)  
 (d)  $\frac{\sqrt{x} + \ln x}{x}$  (e)  $\frac{x+1}{e^x}$  (f)  $x^2 \sqrt{1+x^3}$

(a)  $= \frac{1}{2}(\cos(5x) + \cos(x))$  donc primitive  $\frac{1}{10} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin(x)$ , (b)  $u = \ln(x)$ ,  $F(x) = \frac{1}{4} \ln^4(x)$ ,  
 (c) Difficile, demande division de polynômes et décomposition en éléments simples?  $F(x) = x \cdot \ln(x^2 - 1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1} \, dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - \int 2 + \frac{2}{x^2-1} \, dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - 2x - \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \, dx = x \cdot (\ln(x^2 - 1) - 2) + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$  (d)  $\int x^{-\frac{1}{2}} + \frac{\ln(x)}{x} \, dx = 2\sqrt{x} + \frac{\ln^2(x)}{2}$ . Pour voir une primitive de  $\frac{\ln(x)}{x}$ , on peut par exemple faire intégration par parties  $u' = \frac{1}{x}$  et  $v = \ln(x)$ . (e) Avec  $u' = e^{-x}$  et  $v = (x+1)$  on trouve  $F(x) = -(x+2)e^{-x}$  (f) avec  $u = 1+x^3$  on trouve  $F(x) = \frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}$

## COMPLÉMENTS

### Intégrale et aire

**Exercice 4.14.** Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

- (a)  $\int_{-3}^2 (3x - 2) \, dx$ ; (b)  $\int_{-4}^3 (|x - 2| - |x + 2|) \, dx$ .

**Exercice 4.15.** Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

- (a)  $\int_{-2}^2 \sinh(x) \, dx$  (b)  $\int_0^\pi \sin(2x) \, dx$

## Linéarisation

**Exercice 4.16.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a)  $(\sqrt{x} + x^2)^3$       (b)  $\sin(x) \cos(x)$       (c)  $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$       (d)  $\sinh^2(x)$

## Intégration par parties

**Exercice 4.17.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a)  $x^2 \cdot \cos(x)$       (b)  $x \cdot \cos^2(x)$       (c)  $(x+1) \cdot e^x \cdot \ln(x)$       (d)  $\ln(x)$       (e)  $e^{ax} \cos(bx)$

**Exercice 4.18.** Soit

$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ . Puis calculer  $\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4 dx$ .

**Exercice 4.19.** Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

En écrivant  $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$ , démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x) dx$ .

**Exercice 4.20.** Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx.$$

dans le cas où  $n = 3$ .

## Changement de variables

**Exercice 4.21.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a)  $(x^2 + 1) \sqrt[3]{x^3 + 3x - 2}$       (b)  $\frac{x^2}{4 + x^6}$       (c)  $2 \sin(x) \cos(x) e^{\cos(2x)}$

**Exercice 4.22.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sqrt{2-x^2} & \text{(b)} \sqrt{1+2x-x^2} & \text{(c)} \sqrt{x^2-4} \\ \text{(d)} \sqrt{x^2+4x-5} & \text{(e)} \sqrt{2x^2+32} & \text{(f)} \sqrt{2x^2-4x+4} \end{array}$$

**Exercice 4.23.** Calculer

$$\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$$

**Exercice 4.24.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}} & \text{(b)} \frac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{(c)} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(d)} \frac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}} \\ \text{(e)} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} & \text{(f)} \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{(g)} \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{(h)} \sqrt{4x^2-8x+24} \end{array}$$

**Exercice 4.25.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)+\sin^2(x)}} & \text{(b)} \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}} \end{array}$$

### Intégration des fractions rationnelles

**Exercice 4.26.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{3x-11}{x^2-5x+6} & \text{(b)} \frac{3x-1}{x^2+4x+4} \end{array}$$

### Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{(c)} \frac{1}{e^x+2e^{-x}} & \text{(Indication : } u=e^x\text{.)} & \text{(d)} \frac{1}{1+\sqrt{x}} & \text{(Indication : } u=1+\sqrt{x}\text{.)} \\ \text{(e)} \frac{\sin x \cdot \cos x}{(2+\sin x)^2} & \text{(Indication : } u=2+\sin x\text{.)} & \text{(f)} \frac{1}{e^{2x}-e^x-2}. \end{array}$$

**Exercice 4.27.** En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes (on pourra utiliser le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$ ).

$$(a) \frac{1}{5 + 3 \cos(x)}$$

$$(b) \frac{1}{\cos(x) + \sin(x) + 2}$$

**Exercice 4.28.** Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$ ).

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos(x)} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 + 3 \cos(x) - \sin(x)} dx$$

### Fonction définie par une intégrale

**Exercice 4.29.**

1. Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a(t)$  et  $b(t)$  des fonctions dérivables et  $F$  une primitive de  $f$ . Montrer que la dérivée par rapport à  $t$  de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx$$

est  $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$ . Indication : Utiliser  $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$ .

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à  $t$  de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x dx.$$

- (a) Intégrer d'abord, puis dériver.
- (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.