φ-modules étales ... et la courbe

X. Caruso, 31 mars 2015

[FF12] Vector bundles on curves and p-adic Hodge Theory (notes étendues d'exposé à Durham)

[F13] Au-delà de la courbe

Objectif : classifier les φ-modules étales sur B^+_{cris}

(NB Fargues-Fontaine dit "φ-module" pour "φ-module étale")

1. Les anneaux

On peut tout faire sur une ext. finie $E/\mathbb{Q}_p$ mais pour simplifier les notations, restons sur $\mathbb{Q}_p$ (ça change rien).

$C := \mathbb{C}_p \supset \mathcal{O}_C$

$R = \varprojlim_{Frob} \mathcal{O}_C/p \quad (= \mathcal{O}_C^\flat) \qquad Frac(R)$

val. sur R définie par : $v_R(x) = \lim_{i\to\infty} p^i v_C(\hat{x}_i) \qquad x = (x_0, x_1, \dots)$

$F = Frac(R)$ parfait, et $\mathcal{O}_F = R$

(Toute la suite marchera avec les seules données d'un corps parfait muni d'une val. de rang 1)

↳ autre exemple : $F = k((u))^{perf}$

$$W(\mathcal{O}_F) = \left\{ \sum_{i\geq 0} [a_i] p^i, \ a_i \in \mathcal{O}_F \right\}$$

Dans la suite on notera parfois $\pi = p$.

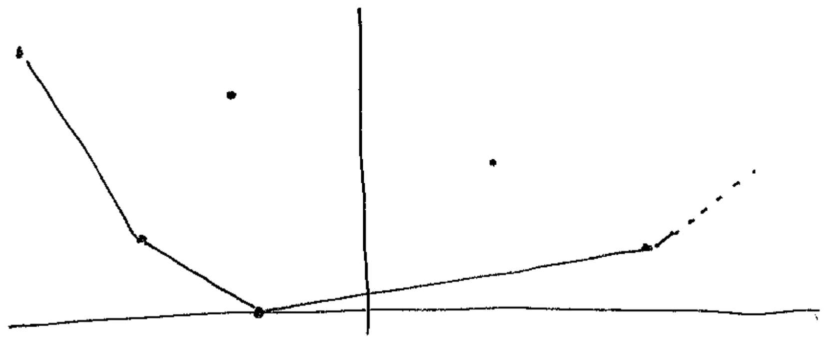
$$W(\mathcal{O}_F)[1/p] = \left\{ \sum_{i \gg -\infty} [a_i] p^i, \ a_i \in \mathcal{O}_F \right\}$$

Étant donné $x \in W(\mathcal{O}_F)[1/p]$, on définit son polygone de Newton : $x = \sum [a_i] p^i$

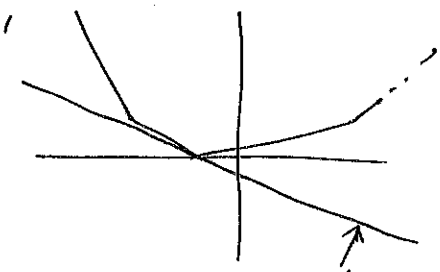
$NP(x)$ = enveloppe convexe des points $(i, v_F(a_i))$ et d'un point $(0, +\infty)$

(On confond une fonction et son épigraphe.)

Le PN d'un produit est la somme convexe des PN



On a une notion de transformée de Legendre :
on choisit une pente $s \in \mathbb{R}$, on la fait tangenter inférieurement le graphe, et on regarde où la droite en question intersecte l'axe des y. On obtient une formule du genre : pour f fonction convexe,



$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + sx$$

<u>NB</u> : $f \mapsto f^*$ involutif

Si $x = \sum [a_i] p^i$ on déf :

$$\|x\|_\rho \overset{\text{déf}}{=} \sup_i \|a_i\| \rho^i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on a alors}}}{=} \exp\left(NP(x)^*(+\log \rho)\right).$$

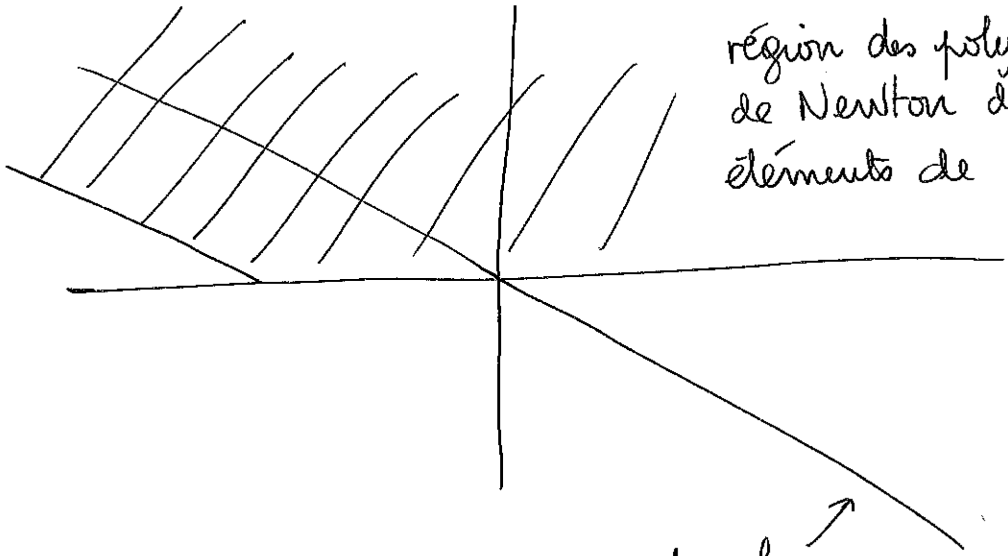
en effet, $\log \|x\|_\rho = \sup_i \left(i \log \rho + \log \|a_i\|\right)$.

<u>Proposition</u>: Les $\|\cdot\|_\rho$ sont multiplicatives, pour $\rho \in]0,1[$.
En fait ce sont des normes sur $W(\mathcal{O}_F)[1/p]$.

Dem Admis ☒

Pour $\rho \in]0,1[$, ie $\log \rho < 0$, on note B_ρ^+ le complété de $W(\mathcal{O}_F)[1/p]$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$.

On définit $B^+ = \bigcap_\rho B_\rho^+$



région des polygones de Newton des éléments de B^+_ρ

pente $= \log \rho$

$\cancel{B^+_{cris}}$ $A_{cris} = \widehat{W(\mathcal{O}_F)}^{DP}$ sur l'idéal $\ker(\theta)$

$\theta : \mathcal{O}_F \longrightarrow \mathcal{O}_C$

$x = (x_0, \dots, x_n, \dots) \longmapsto \lim_{n \to \infty} \hat{x}_n^{p^n}$

θ se prolonge en un morphisme d'anneaux $W(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathcal{O}_C$

$\ker(\theta)$ engendré par $[a] - p$ où

$a = (p, \sqrt[p]{p}, \sqrt[p^2]{p}, \dots) \in \mathcal{O}_F$

$B^+_{cris} = A_{cris}[1/p]$

Il existe $\rho_1, \rho_2 \in]0,1[$ tels que $B^+_{\rho_1} \subset B^+_{cris} \subset B^+_{\rho_2}$.

Ceci implique quelque chose. Notons que Frobenius agit ainsi :

$$\varphi : B^+_\rho \xrightarrow{\sim} B^+_{\rho^p}$$

2. Les φ-modules

Soit B un anneau et $\varphi : B \to B$ endomorphisme.

Déf Un φ-module sur (B, φ) est un module projectif de rang fini M sur B, muni d'une application $\varphi : M \to M$ qui est φ-semi-linéaire. On dit qu'il est étale si son linéarisé est un isomorphisme, i.e. $\mathrm{id} \otimes \varphi_M : B \underset{\varphi, B}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} M$.

$$\lambda \otimes x \longmapsto \lambda\varphi(x)$$

~~Prop : La catégorie des φ-modules~~

Prop Notons $A = B^+_\rho$ ou B^+_{cris}. On a alors

$$\left\{\begin{matrix}\varphi\text{- modules étales} \\ \text{sur } A\end{matrix}\right\} \simeq \left\{\begin{matrix}\varphi\text{- modules étales} \\ \text{sur } B^+\end{matrix}\right\}$$

$$A \underset{B^+}{\otimes} M \longleftarrow M$$

Dém : Le point clé est que $\varprojlim_{\text{Frob}} A = B^+$ ⊠

Classification des φ-modules étales sur B^+ (F alg clos)

3 étapes.

1. Classification sur $W(k_F)[1/p]$ $\quad k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$ alg. clos
   (C'est Dieudonné-Manin)

2. Classification sur $\overline{B}$ où $\overline{B} = B^+/\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p} = \{x \in B^+ \text{ tq } \|x\|_0 < 1\}$$

$$\|x\|_0 = \lim_{\rho \to 0} \|x\|_\rho = \inf_{i \in \mathbb{R}} NP(x)(i)$$

$\overline{B}$ est local de corps résiduel $W(k_F)[1/p]$

3. Remonter à B^+

En fait, l'étape difficile est 1. que l'on va seulement énoncer.

Th (Dieudonné-Manin) k alg clos de car p

$A = W(k)[1/p]$ = un corps, $\varphi : A \to A$ Frobenius

Soit M un φ-module étale sur A. Alors il existe

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r \in \mathbb{Q}$ tels que

$$M = M_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus M_{\lambda_r}$$

où, si $\lambda = \frac{h}{d}$ avec h, d premiers entre eux et $d > 0$,

$A(\lambda) = M_\lambda = Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_d \quad \varphi(e_1) = e_2, \dots, \varphi(e_{d-1}) = e_d, \varphi(e_d) = p^h e_1$.

h est appelé hauteur, λ est appelé pente.

De plus les λ_i sont uniquement déterminés.

De plus encore, $\mathrm{Ext}^1(M_\lambda, M_\mu) = 0$,

et $\mathrm{Hom}(M_\lambda, M_\mu) \begin{cases} \simeq \mathbb{F}_{p^d} & \text{si } \lambda = \mu = \frac{h}{d} \\ \simeq 0 & \text{si } \lambda \neq \mu. \end{cases}$

Les M_λ sont les objets simples de la catégorie.

<u>Th</u> (Fargues. Fontaine) Tout φ-module étale sur $\overline{B}$ s'écrit

$$\overline{B}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \overline{B}(\lambda_r)$$

avec $\overline{B}(\lambda)$ défini de manière analogue à $A(\lambda)$ plus haut.

<u>Dém</u> Soit M un φ-module étale sur $\overline{B}$. Notons

$M_k = W(k_F)[1/p] \otimes_{\overline{B}} M$. D'après Dieudonné_Manin,

notant $A = W(k_F)[1/p]$, il existe une injection $A(\lambda) \hookrightarrow M_k$

$$\begin{tikzcd} A(\lambda) \arrow[r, hook] & M_k \\ \overline{B}(\lambda) \arrow[u] \arrow[r, dotted, "\exists ?"] & M \arrow[u] \end{tikzcd}$$

De façon générale, si M_1, M_2 sont deux φ-modules sur $\overline{B}$,

on peut former $M_1^\vee \otimes M_2$ qui est un φ-module, étales si M_1 et M_2 le sont, puis :

$$\mathrm{Hom}_\varphi(M_1, M_2) = (M_1^\vee \otimes M_2)^{\varphi = 1}.$$

Relever $A(\lambda) \to M_k$ revient donc à relever un certain point fixe.

Quitte à twister, on peut supposer que les pentes de M_k sont toutes ≥ 0.

Ceci implique (cf Dieudonné. Manin) qu'il existe un $W(k_F)$- réseau Λ dans M_k qui est φ-stable.

Alors $\exists N$ un φ-module étale sur $W(\mathcal{O}_F)$, muni de morphismes $N \otimes_{W(\mathcal{O}_F)} \overline{B} \longrightarrow M \otimes \overline{B}(-\lambda)$

$$N \otimes_{W(\mathcal{O}_F)} W(k_F) \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes W(k_F)(-\lambda)$$

(prendre une base du réseau, écrire la matrice... de φ)

<u>Fait</u>: Si $x \in N_k$ tq $\varphi(x) = x$ alors $\exists \hat{x} \in N$ tq $\varphi(\hat{x}) = \hat{x}$, $\hat{x}$ relève x

C'est un corollaire du fait suivant :

$$id - \varphi : W(m_F) \otimes N \longrightarrow W(m_F) \otimes N \quad \underline{\text{surjectif}}$$

qui découle de ce que φ est top. nilpotent sur $W(m_F) \otimes N$

Il reste à calculer $\mathrm{Ext}^1(\overline{B}(\lambda), \overline{B}(\mu))$. C'est égal à $\mathrm{coker}\left(id - \varphi : \overline{B}(\mu - \lambda) \to \overline{B}(\mu \cdot \lambda)\right)$. On veut mq c'est 0.

Ça revient à vérifier que

$$\mathrm{coker}\left(id - \pi^h \varphi^d : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}\right) = 0.$$

Si $h > 0$: $\pi^h \varphi^d$ est top. nilpotent.

Si $h < 0$: $\pi^{-h} \varphi^{-d}$ est top. nilpotent

Si $h = 0$, ça découle du fait que c'est vrai dans $W(k_F)[\frac{1}{p}]$.

<u>Th</u> (F-F) Le foncteur $\{\varphi\text{-modules sur } B^+\} \longrightarrow \{\varphi\text{-moduls sur } \overline{B}\}$ est pleinement fidèle (en fait, une éq. de cat).

<u>Dém</u> Il suffit de démontrer que si M est un φ-module étale sur B^+, alors $M^{\varphi=1} = \overline{M}^{\varphi=1}$ où $\overline{M} = \overline{B} \otimes_{B^+} M$.

Cela revient à montrer que

$$id - \varphi : pM \longrightarrow pM \quad \text{est surjective.} \qquad (\star)$$

Notons A la matrice de φ_M dans une B^+-base.

Soit $x \in M$ et X son vecteur-colonne de coordonnées dans cette base. Le vecteur $\varphi^k(x)$ a pour coordonnées

$$A \cdot \varphi(A) \cdots \varphi^{k-1}(A) \cdot \varphi^k(X).$$

Notons $v_\rho(x) = \inf_i v_\rho(x_i)$ $\quad x_i = $ coord de x $\qquad v_\rho(A) = \inf v_\rho(a_{ij})$

dépend du choix de base mais peu importe

$$v_\rho(\varphi^k(x)) \geq v_\rho(A) + v_\rho(\varphi(A)) + \dots + v_\rho(\varphi^{k-1}(A)) + v_\rho(\varphi^k(X))$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} p^i v_{\rho p^{-i}}(A) + p^k v_{\rho p^{-k}}(X) \quad \text{car } v_\rho(\varphi^i(A)) = p^i v_{\rho p^{-i}}(A)$$

Or on vérifie que $v_{\rho\lambda}(A) \geq \lambda v_\rho(A)$. Utilisant ceci :

$$v_\rho(\varphi^k(x)) \geq k\, v_\rho(A) + p^k v_{\rho p^{-k}}(x)$$

$$\downarrow k \to \infty$$

$$v_0(x) > 0 \quad \text{si } x \in pM.$$

Il s'ensuit que $\varphi^k(x) \to 0$ si $x \in pM$. D'où $(\star)$ $\qquad \boxtimes$