

3. Le groupe linéaire et quelques sous-groupes classiques

Soit k un corps et E un k -EV.

Déf Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des automorphismes k -linéaires de E .

Si $n = \dim(E) < \infty$, le choix d'une base fournit un iso. de k -EV $E \simeq k^n$ et un iso. de groupes $GL(E) \simeq GL_n(k)$.

Les sous-groupes classiques de $GL_n(k)$ (matrices diagonales par blocs, triangulaires...) ont une signification géométrique que nous allons décrire.

Déf Soit $n \geq 1$ et $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet d'entiers tel que $d_i \geq 1$ et $\sum_{i=1}^n d_i = n$.

Une décomposition de E en somme directe de type $\underline{d}$ est une

écriture $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ où F_i est un sous-espace et $\dim(F_i) = d_i$.
(Somme directe)

Le groupe $G = GL(E)$ agit sur l'espace $X = \text{Déc}_{\underline{d}}(E)$ des décompositions comme ci-dessus, de la manière suivante :

Si $g \in GL(E)$ et $\mathcal{D} = (F_1, \dots, F_n) \in X$, $g \cdot \mathcal{D} \stackrel{\text{déf}}{=} (g(F_1), \dots, g(F_n))$.

Prop Soit $\mathcal{D}$ comme ci-dessus.

(1) Le stabilisateur de $\mathcal{D}$ est $G_{\mathcal{D}} = \{g \in GL(E), g(F_i) \subset F_i \text{ pour tout } i\}$
 $= \{g \in GL(E), g(F_i) = F_i \text{ pour tout } i\}$

(2) L'action de $GL(E)$ sur $\text{Déc}_{\underline{d}}(E)$ est transitive, i.e. $O(\mathcal{D}) = \text{Déc}_{\underline{d}}(E)$.

Dém (1) est clair.

(2) Soient $\mathcal{D} = (F_1, \dots, F_n)$ et $\mathcal{D}' = (F'_1, \dots, F'_n)$ deux décompositions.

Soient $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ base de F_i  ont même dim

$\mathcal{B}'_i = (e'_{i,1}, \dots, e'_{i,d_i})$ base de F'_i 

On sait qu'il existe une (unique) application linéaire $g: E \rightarrow E$

telle que $g(e_{i,j}) = e'_{i,j}$ pour tous $i=1, \dots, n$ et $j=1, \dots, d_i$.

De plus g est bijective car $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}'_r$ sont des bases. Par construction, on a $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ $\square$

Rem si on fixe $\mathcal{D} = (F_1, \dots, F_r)$ et des bases $\mathcal{B}_i$ pour F_i , alors dans la base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ les éléments du stabilisateur $G_{\mathcal{D}}$ sont représentés par les matrices diagonales par blocs de type $\underline{d}$:

Les automorphismes qui stabilisent une décomposition en somme directe de droites ($d_i=1$ pour tout i) sont ceux qui sont diagonalisables.

$$d_1 \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} d_r$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{d_1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{d_r}$

Nous passons maintenant aux matrices triangulaires.

Déf Soit $n \geq 1$ entier et $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un n -uplet avec $d_i \geq 1$ et $\sum_{i=1}^n d_i = n$.

Un drapeau de E de type $\underline{d}$ (ou filtration de E de type $\underline{d}$)

est une suite croissante de sous-espaces $\mathcal{F} = (\{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E)$ telle que $\dim(F_i) = d_1 + \dots + d_i$ pour tout i .

Le groupe $G = GL(E)$ agit sur l'ensemble $X = \mathcal{F}\ell_{\underline{d}}(E)$ des drapeaux de la manière suivante:

Si $g \in GL(E)$ et $\mathcal{F} = (F_i) \in X$, $g \cdot \mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} (0 \subset g(F_1) \subset \dots \subset g(F_n) \subset E)$.

Prop soit $\mathcal{F}$ comme ci-dessus.

ou $\subset F_i$, comme on veut

(1) Le stabilisateur de $\mathcal{F}$ est $G_{\mathcal{F}} = \{g \in GL(E), g(F_i) = F_i\}$

(2) L'action de $GL(E)$ sur l'espace des drapeaux $\mathcal{F}\ell_{\underline{d}}(E)$ est transitive.

Dém semblable à la dém. donnée pour $\text{Dég}_{\underline{d}}(E)$ $\square$

On parle de drapeau complet lorsque les sauts de dimension sont égaux à 1 ($d_i=1, \forall i$) c-à-d quand la longueur du drapeau est maximale.

Rem Fixons un drapeau $\mathcal{F} = (F_1 \subset \dots \subset F_n)$ de type $(d_1, \dots, d_n)$.

Considérons une base β de E obtenue à partir d'une base de F_1 , complétée en une base de F_2 , etc. Dans cette base, les éléments du stabilisateur $G_{\mathcal{F}}$ sont représentés par les matrices triangulaires par blocs de type $\underline{d}$:

$$G_{\mathcal{F}} \cong \left\{ d_1 \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

$\begin{matrix} \text{--- } d_1 \text{ ---} & \text{--- } d_2 \text{ ---} & \text{--- } d_3 \text{ ---} \\ * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{matrix}$

Pour les drapeaux complets ($d_i = 1$ pour tout i), on a $G_{\mathcal{F}} \cong T_n(k)$

et on a démontré au chap. 1, § 4 qu'il est résoluble.

Pour les drapeaux partiels, c'est-à-dire non complets, le stabilisateur n'est presque jamais résoluble. Pour comprendre pourquoi, considérons les drapeaux de type $(1, 2)$ en dim $n = 3$, et le groupe

$$G_{\mathcal{F}} = G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}, a, \dots, g \in k \right\}.$$

Nous serons bientôt capables de calculer les groupes dérivés suivants:

teasing! $D(GL_n(k)) = D(SL_n(k)) = SL_n(k)$ pour tout $n \geq 2$
 (★) et tout corps k tel que $|k| \geq 5$.

Admettons ceci. Les matrices de G sont de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad A \in GL_1(k), B \in M_{1,2}(k), C \in GL_2(k)$$

et G contient le sous-groupe $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\} \cong GL_2(k)$. D'après

le résultat (★) ci-dessus on a $D(H) = D^2(H) = D^3(H) = \dots \cong SL_2(k)$,

donc pour tout $i \geq 1$ $D^i(G)$ contient $D^i(H) \cong SL_2(k)$, donc $D^i(G) \neq \{1\}$ $\square$