

4. Générateurs de $GL(E)$ et $SU(E)$

On continue avec un espace vectoriel E de dim finie n sur un corps k .

À tout vecteur $a \in E$ et toute forme $f \in E^*$ on associe un endomorphisme:

$$u = u_{a,f} : E \rightarrow E, \quad u_{a,f}(x) = x + f(x)a.$$

Lemme (1) $u \neq \text{id}_E$ ssi $f \neq 0$ et $a \neq 0$

(2) u est inversible ssi $f(a) \neq -1$.

Dém (1) Si $f=0$ ou $a=0$, alors $u = \text{id}_E$. Réciproquement, si $f \neq 0$ et $a \neq 0$, il existe x tel que $f(x) \neq 0$ donc $f(x)a \neq 0$ et $u(x) \neq x$.

(2) Si $f=0$ l'assertion est claire, donc OPS $f \neq 0$. Alors $H = \ker(f)$ est un hyperplan. On vérifie que $(\star) u(x) - (1+f(a))x \in H$:

$$f(u(x) - (1+f(a))x) = f(x) + f(x)f(a) - f(x) - f(a)f(x) = 0.$$

Soit $B = B_H \cup \{x\}$ une base de E formée avec une base B_H de H et un vecteur $x \notin H$. Dans cette base, la matrice de u est:

$$\text{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{smallmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 1+f(a) \end{array} \right) \quad \swarrow \text{d'après } (\star) \text{ ci-dessus.}$$

On déduit que $\det(u) = 1+f(a)$ et le résultat en découle $\square$

Dans la suite on étudie des $u = u_{a,f}$ inversibles et distincts de id_E .

Alors $D = \text{Vect}(a)$ et $H = \ker(f)$ sont appelés la droite et l'hyperplan de la transformation u , respectivement.

(Grâce au lemme, ce sont en effet une droite et un hyperplan.)

Lemme Soit $u \neq \text{id}_E$ une transformation du type précédent, de droite D et d'hyperplan H . Soit $g \in GL(E)$. Alors gug^{-1} est une transformation du même type, de droite $D' = g(D)$ et d'hyperplan $H' = g(H)$.

Dém $(gug^{-1})(x) = g(g^{-1}(x) + f(g^{-1}(x))a) = x + f(g^{-1}(x))ga = u_{g(a), f \circ g^{-1}}(x)$.

Or la droite engendrée par ga est $g(D)$, et l'hyperplan noyau de $f \circ g^{-1}$ est $g(H)$ $\square$

Prop Soit $u = u_{a,f} \neq \text{id}_E$ transformation du type précédent. On note $D = \text{Vect}(a)$ et $H = \ker(f)$.

(1) LCSSE : (i) u est diagonalisable

(ii) $D \not\subset H$

(iii) $f(a) \neq 0$

(iv) la matrice de u dans une certaine base est $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1+f(a) \end{pmatrix}$

Dans ce cas on dit que u est une **dilatation** de rapport $\lambda := 1 + f(a)$.

(2) LCSSE : (i) u n'est pas diagonalisable

(ii) $D \subset H$

(iii) $f(a) = 0$

(iv) la matrice de u dans une certaine base est $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

Dans ce cas on dit que u est une **transvection**.

Dém Comme $u|_H = \text{id}_H$, le scalaire 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. Comme $\det(u) = 1 + f(a)$, la dernière v.p. est $1 + f(a)$.

(1) Si u est diagonalisable, comme $u \neq \text{id}_E$ on doit avoir $1 + f(a) \neq 1$ c'est-à-dire $f(a) \neq 0$. Ceci signifie que $D \not\subset H$. Dans une base

Composée d'une base de H et d'un vecteur propre pour la valeur propre $1+f(\lambda)$, la matrice de u a la forme indiquée. Enfin si la matrice de u a la forme indiquée dans (iv), il est clair que u est diagonalisable. Les quatre conditions sont donc équivalentes.

(2) Les conditions (i), (ii), (iii) sont les négations des conditions analogues dans (1) donc il n'y a rien à démontrer. Dans cette situation, on a vu en démontrant le premier lemme que pour tout choix de vecteur $e_n \notin H$, le vecteur $e_{n-1} := u(e_n) - e_n$ est un vecteur de H , non nul. En complétant e_{n-1} en une base de H , on obtient $B = \{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\}$ où $\text{Mat}(u)$ est comme indiquée $\square$

Les transvections sont précieuses pour déterminer les centres de $GL(E)$ et de $SL(E)$; ceci se fait après un petit lemme classique.

Lemme Un endomorphisme $g: E \rightarrow E$ qui préserve toutes les droites de E est une homothétie.

Dém OPS $E \neq 0$. Soit $e \neq 0$; il existe $\lambda \in k$ tel que $g(e) = \lambda e$. Montrons que $g(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$. Si $x \in \text{Vect}(e)$ c'est clair, et sinon, par hypothèse il existe $\mu, \nu \in k$ tels que $\mu(e+x) = g(e+x) = g(e) + g(x) = \lambda e + \nu x$. Comme $\{e, x\}$ est libre on déduit que $\mu = \lambda = \nu$ donc $g(x) = \lambda x$ $\square$

Th: Le centre de $GL(E)$ est égal au sous-groupe des homothéties, isomorphe à $k^\times$. Le centre de $SL(E)$ est égal au sous-groupe des homothéties de $\det = 1$, isomorphe au sous-groupe $\mu_n(k) \subset k^\times$ des racines n -ièmes de l'unité de $k^\times$.

Dém Soit $g \in GL(E)$ qui commute avec tous les éléments de $SL(E)$.

En particulier, g commute avec toutes les transvections : $gug^{-1} = u$ (*)

Pour toute droite D , prenant pour u une transv. de droite D , on a vu que gug^{-1} est une transv. de droite $g(D)$. L'égalité (*) implique $g(D) = D$.

Ainsi g préserve toutes les droites, donc par le lemme c'est une homothétie. Ceci démontre les 2 assertions du théorème. $\square$

Th Les transvections engendrent le groupe $SL(E)$.

Les transvections et dilatations engendrent le groupe $GL(E)$.

La deuxième assertion est conséquence de la première, car si $g \in GL(E)$ et λ est n'importe quelle dilatation de rapport $\lambda := \det(g)$, on a $\lambda^{-1}g \in SL(E)$.

Il reste à traiter le cas de $SL(E)$. On utilise deux lemmes.

Lm 1 : Soient $x \in E \setminus \{0\}$ et H_1, H_2 deux hyperplans distincts tels que $x \notin H_1 \cup H_2$. Alors il existe une transvection u telle que $u(x) = x$ et $u(H_1) = H_2$.

Dém L'hypothèse $H_1 \neq H_2$ implique

que $\dim(E) \geq 2$ et $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Comme $x \notin H_1 \cup H_2$, l'espace

$$H := H_1 \cap H_2 + \text{Vect}(x)$$

est un hyperplan distinct de H_1 et H_2 .

En particulier, on a $H + H_1 = H + H_2 = E$.

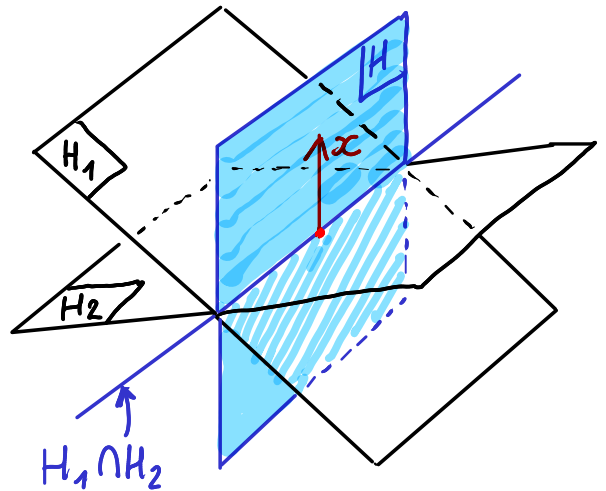
Soit $z \in H_2 \setminus H$, comme $E = H + H_1$ on peut écrire $z = a + y$, $a \in H$, $y \in H_1$.

Le fait que $z \notin H$ implique $y \notin H$, donc il existe une (unique) forme $f \in E^*$ de noyau H telle que $f(y) = 1$. Posons $u(t) = t + f(t)a$.

C'est une transvection d'hyperplan H , donc $u(x) = x$ et

$u(H) = H$. Il reste à voir que $u(H_1) = H_2$. Or $\begin{cases} H_1 = H + \text{Vect}(y) \\ H_2 = H + \text{Vect}(z) \end{cases}$

donc $u(y) = y + a = z$ permet de conclure $\square$



Lm 2 Supposons que $\dim(E) \geq 2$ et soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Alors
il existe u , produit de une ou deux transvections, t.q $u(x) = y$.

Dém: si x et y ne sont pas colinéaires, il existe un hyperplan H
contenant $y-x$ mais pas x . Soit f une forme de noyau H telle
que $f(x) = 1$. Posons $a = y-x$ et $u(t) = t + f(t)a$, alors

$$u(x) = x + a = y.$$

Si x et y sont colinéaires, comme $\dim(E) \geq 2$ on peut trouver
un z qui ne leur est pas colinéaire. Par ce qui précède, il existe
deux transvections u_1, u_2 t.q $\begin{cases} u_1(x) = z \\ u_2(z) = y \end{cases}$ et $u = u_2 u_1$ convient $\square$

Dém du théorème: on fait une récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$

il n'y a rien à démontrer. Si $n \geq 2$, soit $v \in SL(E)$. On doit
montrer que v appartient au sous-groupe $T \subset SL(E)$ engendré
par les transvections: pour cela il est possible de remplacer v
par un produit tv ou vt , $t \in T$.

Choisissons $x \in E \setminus \{0\}$. Par le lemme 2, quitte à composer v avec
un produit de une ou deux transvections on peut supposer $v(x) = x$.
Choisissons alors un hyperplan H tel que $x \notin H$. Alors $x = v(x) \notin v(H)$,
donc par le lemme 1, quitte à composer v avec une autre
transvection on peut supposer que $v(H) = H$.

Par hyp. de récurrence, $v|_H \in SL(H)$ est produit de transvections

$u_{1,H}, \dots, u_{d,H} \in SL(H)$. Chacune s'étend en une
unique transvection $u_i \in SL(E)$ qui fixe x .

Comme $\begin{cases} v(x) = x = (u_1 \dots u_d)(x) \\ v|_H = (u_1 \dots u_d)|_H \end{cases}$, on a

$$v|_H = (u_1 \dots u_d)|_H$$

$v = u_1 \dots u_d$ ce qui conclut. $\square$

$$u_i = \begin{pmatrix} \overbrace{\quad}^H & x \\ \mu_{i,H} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix}$$