

5. Conjugaison des transvections. Commutateurs

Prop Deux transvections quelconques sont conjuguées dans $GL(E)$.
Pour $n \geq 3$, elles le sont aussi dans $SL(E)$.

Dém: on a vu que toute transvection a pour matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right)$ dans une base convenable: ceci répond à la question de la conjugaison dans $GL(E)$. Si de plus $n \geq 3$, soient u, v deux transvections et $g \in GL(E)$ t.q. $v = gug^{-1}$. Posons $\lambda = \det(g)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de v est celle indiquée ci-dessus.

Soit $s \in GL(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \lambda^{-1} \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right)$.

Alors $sv = vs$ et $\det(s) = \lambda^{-1}$, donc

$$v = svs^{-1} = (sg)u(sg)^{-1} \text{ avec } sg \in SL(E) \quad \square$$

OK
car
 $n \geq 3$

Prop ($n=2$)

(1) Dans $SL_2(k)$ toute transvection est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un $\lambda \in k^\times$.

(2) Si $\lambda, \mu \in k^\times$, $s = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées ssi λ/μ est un carré.

Dém: (1) soit $\varepsilon_1 \in k^2$ un vecteur directeur de l'hyperplan (=droite car $n=2$) de la transvection. Soit $\varepsilon_2 \notin \text{Vect}(\varepsilon_1)$. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique.

Soit $\delta = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in SL_2(k)$ et la matrice de notre transvection dans la base $(s^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a la forme indiquée.

(2) Soit $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(k)$ tel que $gsg^{-1} = t$. Alors $gs = tg$, c-à-d

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha\lambda + \beta \\ \gamma & \gamma\lambda + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \mu\gamma & \beta + \mu\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Ceci implique $\gamma = 0$ et $\alpha\lambda = \mu\delta$. Comme $\alpha\delta = \det(g) = 1$, on déduit que $\lambda/\mu = \delta/\alpha = \delta^2$ carré dans k .

Réciproquement, si $\lambda/\mu = \delta^2$ avec $\delta \in k^\times$, la matrice $g = \begin{pmatrix} 1/\delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ conjugue s en t $\square$

De la conjugaison des transvections, on déduit le calcul des sous-groupes dérivés de $GL(E)$ et $SL(E)$.

Th: (1) On a $D(GL_n(k)) = SL_n(k)$, sauf dans le cas $n=2, k=\mathbb{F}_2$.

(2) On a $D(SL_n(k)) = SL_n(k)$, sauf dans les cas $n=2, k=\mathbb{F}_2$ et $n=2, k=\mathbb{F}_3$.

Pour simplifier, nous allons démontrer ces résultats lorsque $n \geq 3$ (le résultat général découle quoi qu'il en soit de la simplicité de $PSL_n(k)$ démontrée plus loin). C'est l'occasion d'introduire:

Déf Les matrices de transvection élémentaires sont les matrices

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \quad , \quad i \neq j, \lambda \in k.$$

Puisque $i \neq j$, on a $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{ij}) = I_n + (\lambda + \mu) E_{ij}$ c'est-à-dire

$$\boxed{T_{ij}(\lambda) T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda + \mu)}$$

autrement dit, on a un morphisme de groupes injectif $(k, +) \rightarrow SL_n(k)$
 Pour chaque $i \neq j$. $\lambda \mapsto T_{ij}(\lambda)$.

Dém du th si $n \geq 3$ comme le déterminant d'un commutateur est 1, les groupes dérivés sont inclus dans $SL_n(k)$. Pour l'inclusion réciproque, il suffit de trouver une transvection u qui est le commutateur d'éléments de $SL_n(k)$: en effet, comme les groupes dérivés sont distingués, ils contiennent tous les conjugués de u , donc toutes les transvections, or celles-ci engendrent $SL_n(k)$.

Or ceci est un calcul que l'on a déjà fait au chapitre 1, § 4.

En effet posons $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} = T_{12}(1)$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \end{pmatrix} = T_{23}(1)$.

Alors la formule encadrée ci-dessus donne $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

$$\text{donc } ghg^{-1}h^{-1} = (I + E_{12})(I + E_{23})(I - E_{12})(I - E_{23})$$

$$= (I + E_{12} + E_{23} + E_{13})(I - E_{12} - E_{23} + E_{13}) = I - E_{13}.$$

La transposition $I - E_{13}$ est donc un commutateur. Ceci conduit à

S'agissant des cas particuliers du théorème, nous montrerons plus tard:

- $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ dont le groupe dérivé est A_3
- $SL_2(\mathbb{F}_3)$ est un groupe d'ordre 24 dont le groupe dérivé est égal à l'unique 2-Sylow, isomorphe au groupe des quaternions d'ordre 8.

Pour conclure ce paragraphe, on peut noter que dans $SL(E)$ les transvections sont les éléments $\neq \text{id}_E$ qui ont le plus de points fixes possible (= un hyperplan de points fixes). Avec le théorème de conjugaison, ceci démontre (au moins en $\dim n \geq 3$ et en $\dim n=2$ lorsque tout élément de k est un carré) que dans $SL(E)$, la partie génératrice composée par les transvections possèdent les propriétés agréables ① et ② énoncées dans le § sur les groupes symétriques et alternés.