

2. Espaces affines et sous-espaces affines

On fixe un corps k et les espaces vectoriels sont des k -EV.

Déf un k -espace affine est un ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une action simplement transitive d'un k -espace vectoriel E .
L'espace E est aussi noté $\vec{E}$ et appelé direction de E . Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés points, ceux de E vecteurs. L'action de E sur $\mathcal{E}$ est notée $E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, A un point, u un vecteur.
 $(u, A) \mapsto A + u$

Autant que possible on note u plutôt que $\vec{u}$ pour les vecteurs (c'est plus léger !) mais lorsque la flèche est utile on l'utilise.

Les axiomes d'action s'écrivent (1) $A + 0 = A$
(2) $A + (u + v) = (A + u) + v$.

L'application $\tau_u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $A \mapsto A + u$ est appelée translation de vecteur u .

Rem l'action étant simple et transitive, pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ il existe un unique vecteur u noté $\overrightarrow{AB}$ tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$.
On le note parfois aussi, abusivement, $B - A$.

Si A, B, C sont trois points de $\mathcal{E}$, on a la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

qui est vérifiée car $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \underset{(2)}{=} (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C = A + \overrightarrow{AC}$.

Déf équivalente qui évite le langage des actions :

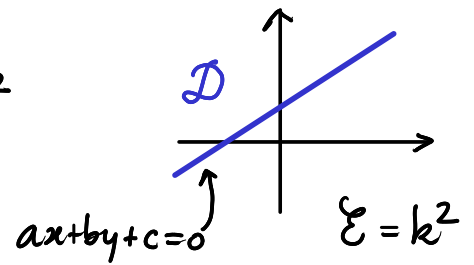
Un k -espace affine de direction E est un ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :

(i) $\forall A \in \mathcal{E}$, l'application $\mathcal{E} \rightarrow E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est bijective

(ii) (Relation de Chasles) $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Exemples 1) $E = \Sigma$ = un k -espace vectoriel, est un espace affine de direction E

2) $D = \{(x, y) \in k^2 \mid ax + by + c = 0\} \subseteq k^2$
 $a, b, c \in k \quad (a, b) \neq (0, 0)$



3) $k = \mathbb{F}_7 = E$ et $\Sigma = \{\text{lundi}, \dots, \text{dimanche}\}$

Déf On appelle dimension de Σ , notée $\dim(\Sigma)$, la dimension de E .

Vectorialisation en un point

Soit Σ un espace affine de direction E et $A \in \Sigma$ un point. La bijection

$$f_A: E \rightarrow \Sigma, \quad f_A(u) = A + u$$

permet de munir Σ d'une structure de k -espace vectoriel notée Σ_A et dont A est l'origine, par transport de structure. (R)appelons ce que signifie le transport: la structure vectorielle Σ_A est définie par

$$M + N \stackrel{\text{def}}{=} f_A(f_A^{-1}(M) + f_A^{-1}(N)) \quad (M, N \in \Sigma)$$

$$\lambda M \stackrel{\text{def}}{=} f_A(\lambda \cdot f_A^{-1}(M)) \quad (\lambda \in k, M \in \Sigma)$$

c'est-à-dire: « on se transporte dans E par f_A^{-1} , on effectue l'opération (somme ou loi externe) puis on revient dans Σ par f_A » ▣

Rem *** Par construction (tautologiquement) $f_A: E \rightarrow \Sigma_A$ est un iso de k EV!

Sous-espaces affines

Prop. Soient Σ un espace affine de direction $E = \vec{\Sigma}$, $\mathcal{F} \subset \Sigma$ une partie non vide, et $A \in \mathcal{F}$. Alors LCSSE:

(1) L'ensemble $\{u = \vec{AM}, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-EV de E .

(2) $\mathcal{F}$ est une orbite d'un sous-EV F de E : $\mathcal{F} = \mathcal{O}_F(A) := \{A + u, u \in F\}$

(3) $\mathcal{F}$ est un sous-EV du vectorialisé Σ_A .

Dém (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $F := \{u = \vec{AM}, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-EV.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_F(A)$ car si $M \in \mathcal{F}$, on a $\vec{AM} \in F$ donc $M = A + \vec{AM} \in \mathcal{O}_F(A)$

$\mathcal{O}_F(A) \subset \mathcal{F}$ car si $M := A + u \in \mathcal{O}_F(A)$ alors l'hypothèse $u \in F$
($u \in F$)

et la définition de F montrent qu'il existe $M' \in \mathcal{F}$ t.q. $u = \vec{AM}'$.

Alors $M = A + u = A + \vec{AM}' = M' \in \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{F}$ est la F -orbite du point A .

(2) $\Rightarrow$ (3) Par construction du vectorielisé $\mathcal{E}_A$, l'application $f_A: E \rightarrow \mathcal{E}_A$ est un isom. de k -EV. Alors $\mathcal{F} = \{A + u, u \in F\} = f_A(F)$ est l'image du sous-EV F , c'est donc un sous-EV de $\mathcal{E}_A$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ici $\{u = \vec{AM}, M \in \mathcal{F}\} = f_A^{-1}(\mathcal{F})$ est la préimage du sous-EV $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_A$ par l'isomorphisme linéaire f_A , c'est donc un sous-espace vectoriel. $\square$

Déf On appelle sous-espace affine de $\mathcal{E}$ une partie non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ satisfaisant les conditions équivalentes de la proposition.

L'espace vectoriel $F = \{\vec{AM}, M \in \mathcal{F}\}$ (qui ne dépend pas du choix de $A \in \mathcal{F}$) est la direction de $\mathcal{F}$.

Rem 1) en fait $F = \{\vec{AB}, A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}\}$ ce qui montre clairement qu'il ne dépend pas d'un choix de point.

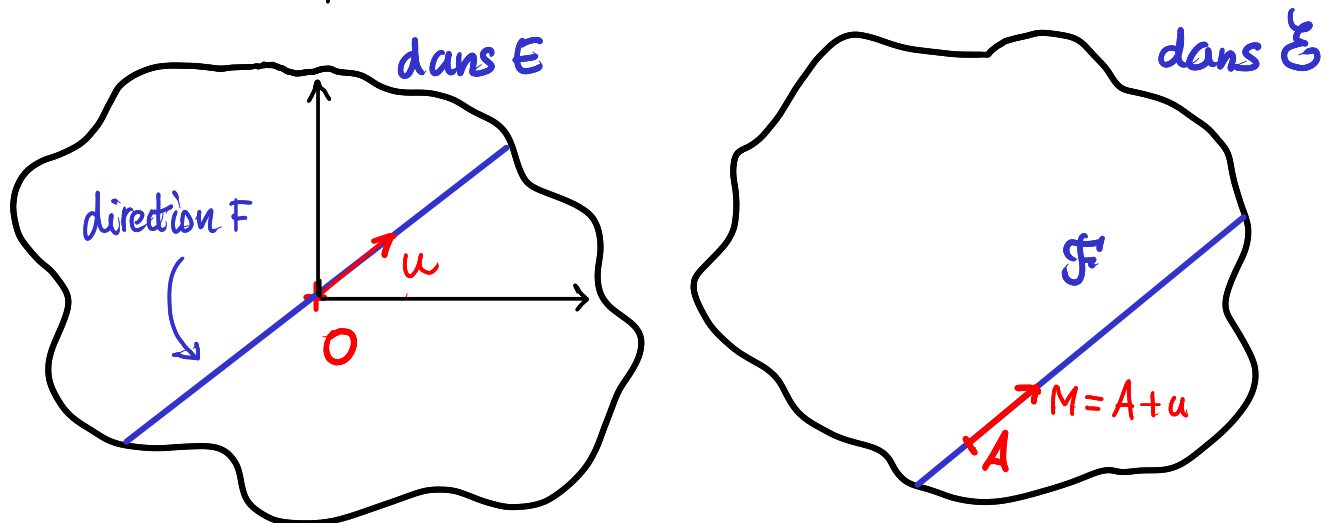
2) un sous-espace affine est un espace affine en son nom propre!

Déf Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines et F_1, F_2 leurs directions.

• On dit que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont parallèles si $F_1 = F_2$.

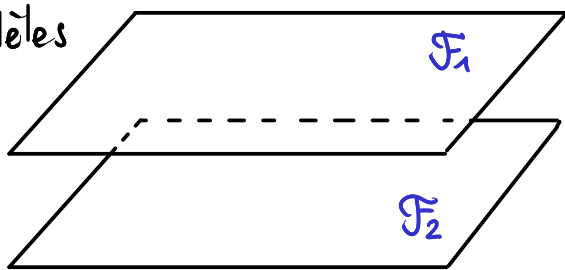
• On dit que $\mathcal{F}_1$ est faiblement parallèle à $\mathcal{F}_2$ si $F_1 \subset F_2$.

Dessin d'un sous-espace affine

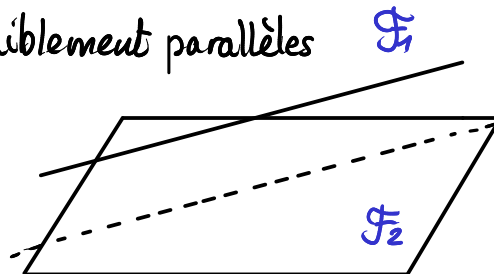


Dessin de sous-espaces (faiblement) parallèles

parallèles



faiblement parallèles



Ombre
de F_1

Remarques / exercices

- 1) Deux SEA (*) parallèles sont égaux ou disjoints. (*) sous-espaces affines
- 2) Un SEA faiblement parallèle à un autre est inclus dedans ou lui est disjoint.
- 3) Soit E un espace affine; F un SEA; $A \in E$ un point.
Alors il existe un unique SEA F' parallèle à F passant par A .