

3. Applications affines ; groupe affine

Prop Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux espaces affines de directions E, F et soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application. Alors LCSSE :

(1) il existe une application linéaire $\varphi: E \rightarrow F$ telle que

$$f(A+u) = f(A) + \varphi(u), \quad \forall A \in \mathcal{E}, u \in E.$$

(2) il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que l'application $\varphi_A: E \rightarrow F$ est linéaire
 $u \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+u)}$

(3) pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application φ_A est linéaire.

Dém : laissée en exercice $\square$

Déf On appelle application affine une application $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ vérifiant les conditions de la proposition. L'application $\varphi: E \rightarrow F$ est appelée partie linéaire (ou linéarisée) de f et notée $\text{lin}(f)$.

Proposition Soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une appl. affine de partie linéaire $\varphi: E \rightarrow F$

Alors f est injective, resp. surjective, resp. bijective, si φ l'est.

Dém Faisons par exemple l'injectivité et laissons le reste $\square$ au lecteur
 $\square$ à la lectrice
 (cocher la case)

Si f est injective, soit $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 0$. Soit $A \in \mathcal{E}$ quelconque.

On a $f(A+u) = f(A) + \varphi(u) = f(A)$ donc $A+u = A$ (par injectivité)
 donc $u = 0$ car l'action est libre
 donc φ injective

Si φ est injective, soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $f(A) = f(B)$. Posons $u = \overrightarrow{AB}$.

Alors $f(A) = f(B) = f(A+u) = f(A) + \varphi(u)$ donc $\varphi(u) = 0$ (action libre)
 donc $u = 0$ (injection)
 donc $B = A+u = A$ $\square$

Exemples 1) Translations de vecteur $u \in E$:

$$\tau_u: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

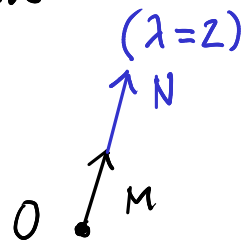
$$A \mapsto A+u$$

2) $\mathcal{E} = E =$ espace affine associé à (ou: sous-jacent à) un espace vectoriel E . Alors les applications affines $f: E \rightarrow E$ sont les appl. de la forme $f(x) = a(x) + b$ avec $a \in GL(E)$ et $b \in E$.
 (une appl. linéaire) (un vecteur)

3) Homothéties de rapport $\lambda \neq 0$ et centre O : c'est l'application

$h = h_{O, \lambda}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $h(M) = \begin{cases} \text{l'unique point } N \in \mathcal{E} \\ \text{tel que } \overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM} \end{cases}$

c'est-à-dire $h(M) = O + \lambda \overrightarrow{OM}$



Exercice Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{(f, \varphi)} \mathcal{F} \xrightarrow{(g, \psi)} \mathcal{G}$ deux applications affines.

- (1) Montrer que la composée $g \circ f$ est affine, de partie linéaire $\psi \circ \varphi$.
- (2) Montrer que si f est bijective, sa bijection réciproque f^{-1} est affine de partie linéaire φ^{-1} .

Déf Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E . On appelle groupe affine de $\mathcal{E}$ et on note $GA(\mathcal{E})$ le groupe des applications affines bijectives $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Prop Avec les mêmes notations:

- (1) l'ensemble $T(\mathcal{E})$ des translations de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe distingué de $GA(\mathcal{E})$, isomorphe à E
- (2) le morphisme $\text{lin}: GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E)$ est surjectif de noyau $T(\mathcal{E})$,
 $f \mapsto \varphi = \text{lin}(f)$

autrement dit on a une suite exacte $1 \rightarrow T(\mathcal{E}) \rightarrow GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E) \rightarrow 1$.

- (3) Pour tout choix de point $A \in \mathcal{E}$, les transformations affines qui fixent A forment un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$ qui s'identifie au groupe linéaire $GL(\mathcal{E}_A)$ du vectorialisé en A . Ce sous-groupe est isomorphe à $GL(E)$ et on a une décomposition en produit semi-direct $GA(\mathcal{E}) = T(\mathcal{E}) \rtimes GL(\mathcal{E}_A)$.

Dém Il est établi dans l'exercice ci-dessus que l'application lin est un morphisme de groupes. Vérifions que son noyau est $T(\mathcal{E})$. Un élément f du noyau est une appl. affine de partie linéaire id_E c'est-à-dire que $f(A+u) = f(A) + u$, $\forall A \in \mathcal{E}, u \in E$. Le vecteur

$$u_0 := \overrightarrow{A f(A)}$$

ne dépend pas de A , car si $B \in \mathcal{E}$ est un autre point, si l'on pose $u = \overrightarrow{AB}$ on a $f(B) = f(A+u) = f(A) + u = A + u_0 + u = B + u_0$ ce qui montre que $\overrightarrow{B f(B)} = u_0$, comme annoncé. Et on a montré d'ailleurs que $f(B) = B + u_0$ pour tout B , i.e. $f = \tau_{u_0} \in T(\mathcal{E})$. Réciproquement $T(\mathcal{E}) \subset \ker(\text{lin})$ est évident, finalement $T(\mathcal{E})$ est égal au noyau et en particulier c'est un sous-groupe distingué de $GA(\mathcal{E})$. Maintenant fixons $A \in \mathcal{E}$ et notons

$$G_A = \{f \in GA(\mathcal{E}), f(A) = A\} = \{f \in GA(\mathcal{E}), f(A+u) = A + \varphi(u)\} \\ \forall A, \forall u$$

le stabilisateur de A dans $GA(\mathcal{E})$.

On voit que $\text{lin}: G_A \rightarrow GL(E)$, $f \mapsto \varphi$ est un isomorphisme d'inverse $GL(E) \rightarrow G_A$, $\varphi \mapsto$ l'unique f telle que $f(A+u) = A + \varphi(u)$.
($\forall A, u$)

En particulier $\text{lin}: GA(\mathcal{E}) \rightarrow GL(E)$ est surjective.

Le fait que G_A s'identifie à $GL(\mathcal{E}_A)$ est clair. Il ne reste qu'à démontrer la structure de produit semi-direct:

$T(\mathcal{E}) \cap G_A = 1$ si $f \in G_A$ on a $f(A+u) = A + \varphi(u)$ pour tous A, u .
Si de plus $f \in T(\mathcal{E})$ on a $\varphi = \text{id}$. Donc $f = \text{id}$.

$T(\mathcal{E}) \cdot G_A = GA(\mathcal{E})$ soit $f \in GA(\mathcal{E})$; on a $f(A+u) = f(A) + \varphi(u)$.
Soit $u_0 := \overrightarrow{A f(A)}$ et $\tau_0(M) = M + u_0$ translation de vecteur u_0 .
Alors $\tau_0(A) = f(A)$, donc $g := \tau_0^{-1} \circ f$ fixe A
c'est-à-dire $g \in G_A$. Ainsi $f = \tau_0 g \in T(\mathcal{E}) G_A$ $\square$

On complète un peu notre liste d'exemples d'applications affines en introduisant les projections :

Lemme soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines (SEA) de $\mathcal{E}$.

Si $E = F \oplus G$ est somme directe des directions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est $\{1 \text{ point}\}$.

Dém soient $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ et $u = \overrightarrow{AB}$. Ecrivons $u = v + w \in F \oplus G$.

Alors $B = A + u = A + v + w$ donc $\mathcal{G} \ni A + v = B - w \in \mathcal{G}$ donc il existe un point $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Si C, C' sont tous deux dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, le vecteur $u = \overrightarrow{CC'}$ appartient à F et à G donc est nul. Ainsi $C' = C$ $\square$

Prop soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux SEA de directions F, G tq $E = F \oplus G$.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on note $\pi(M)$ le point (qui existe et est unique par le lemme) intersection de $\mathcal{F}$ et du SEA $\mathcal{G}'$ parallèle à $\mathcal{G}$ et contenant M . Alors $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une application affine appelée projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.

Dém Soit $A \in \mathcal{F}$. Soit $p: E \rightarrow E$ la proj sur F parallèlement à $E = F \oplus G$.
Montrer que $\pi(M) = A + p(\overrightarrow{AM})$ $\square$

Pour terminer cette section nous mentionnons quelques propriétés (pas très surprenantes) qui expriment les relations entre applications affines et sous-espaces affines :

Prop (1) l'image d'un SEA par une application affine est un SEA

(2) La préimage d'un SEA par une application affine est vide ou un SEA.

Dém exercice... Pour (2) on notera simplement qu'il peut arriver qu'une préimage soit vide, par exemple si $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont deux SEA disjoints la préimage de $\mathcal{F}'$ par une projection $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ comme dans la prop précédente ! $\square$