

5. Espaces projectifs et sous-espaces projectifs

On fixe un corps k et on travaille avec des k -EV de dim. finie.

Def Soit E un k -EV. L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E . Sa dimension est par définition $\dim(E)-1$.

Rem il est naturel de perdre une dimension : les objets de $\dim 3$ sont projetés sur la rétine en des images de $\dim 2$!

Comme toute droite $D \subset E$ possède un vecteur directeur et deux vecteurs directeurs différent (multiplicativement) par un unique scalaire $\lambda \in k^\times$, l'application $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(E)$
$$v \longmapsto D = \text{Vect}(v)$$

est surjective et induit une bijection

$$(E \setminus \{0\}) / k^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(E)$$

où la source est un quotient par la relation de colinéarité : $\left(\begin{array}{l} v_1 \sim v_2 \text{ ssi} \\ \exists \lambda \in k^\times, v_2 = \lambda v_1 \end{array} \right)$

Rem le groupe $k^\times$ agit librement sur $E \setminus \{0\}$ donc toutes les classes d'équivalence (de colinéarité) sont en bijection avec $k^\times$.

Lorsque k est fini, si on pose $q = |k|$ et $n+1 = \dim(E)$

on en déduit que $|\mathbb{P}(E)| = \frac{|E \setminus \{0\}|}{|k^*|} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $E \setminus \{0\}$ est muni de la topologie trace comme ouvert de E . On munit $\mathbb{P}(E)$ de la topologie quotient :

Def Soit $f: X \rightarrow Y$ une application surjective. Si X est un espace topologique, on appelle topologie quotient sur Y la topologie définie par: $V \subset Y$ est ouvert ssi $f^{-1}(V)$ est ouvert.

Le nom de topologie quotient vient du fait qu'une surjection f induit une bijection $X/\sim \xrightarrow{\sim} Y$

$\swarrow$ quotient de X par la relation: $x_1 \sim x_2$ ssi $f(x_1) = f(x_2)$.

Prop Si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est compact. Si on choisit un produit scalaire euclidien resp hermitien sur E et si on note $S(E)$ la sphère unité pour la norme associée, alors la surjection

$\pi: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ induit un homéomorphisme $S(E)/\{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ ($k = \mathbb{R}$)

$[U = S^1 = SO_2(\mathbb{R}) = \text{le cercle unité}] \quad S(E)/U \rightarrow \mathbb{P}(E) \quad (k = \mathbb{C})$

Dém Supposons d'abord que $k = \mathbb{R}$. Comme chaque droite de E peut être engendrée par exactement deux vecteurs directeurs de norme 1 opposés l'un l'autre, on a une bijection $S(E)/\{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$.

(Si on veut on peut voir $S(E)$ comme l'ensemble des demi-droites de E .)

Montrons que $\mathbb{P}(E)$ est séparé. Soient $y \neq y'$ deux points de $\mathbb{P}(E)$, $x, x' \in S(E)$ deux vecteurs directeurs normés pour les droites

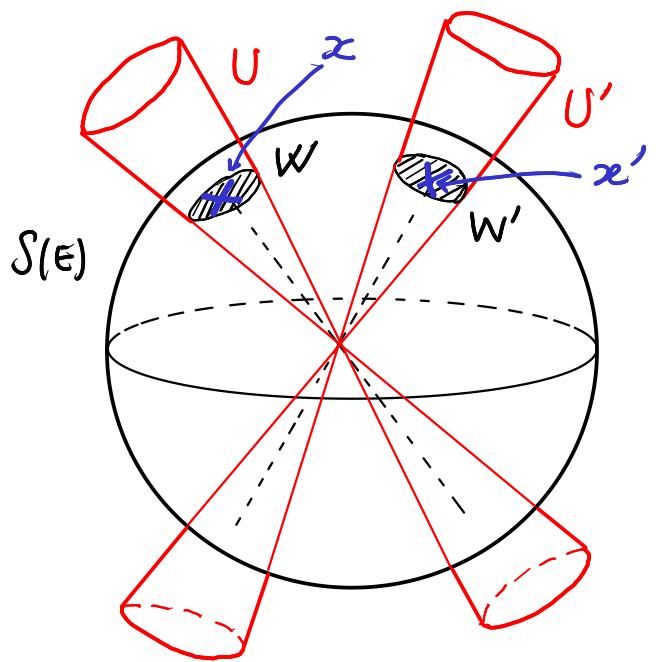
$$D = \pi^{-1}(y) \cup \{0\}, \quad D' = \pi^{-1}(y') \cup \{0\}.$$

Comme la sphère $S(E)$ est séparée,
il existe deux ouverts disjoints
 W, W' dans $S(E)$ contenant x, x' .

Les cônes engendrés

$$U = \mathbb{R}^+ \cdot W, \quad U' = \mathbb{R}^+ \cdot W'$$

sont des ouverts disjoints de $E \setminus \{0\}$
et de plus $U = \pi^{-1}(\pi(U))$, $U' = \pi^{-1}(\pi(U'))$.



Ceci montre que $V := \pi(U)$, $V' := \pi(U')$ sont deux ouverts disjoints
dans $P(E)$ (muni de la top. quotient) en y et y' . Donc $P(E)$ séparé.

L'application $S(E) \hookrightarrow E \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} P(E)$ est continue comme
composée d'applications continues, donc $P(E)$ est séparé et image
continue du compact $S(E)$, il est donc compact.

Lorsque $k = \mathbb{C}$ tout fonctionne pareil, avec la différence que deux
vecteurs directeurs normés d'une droite complexe diffèrent par un
complexe de module 1 i.e. un élément de $\mathbb{T}$.

Rem-exercice [Compléments sur la topologie quotient]

- (1) Soit $\pi: X \rightarrow Y$ une application surjective. Si $x_1, x_2 \in X$ on note $x_1 \sim x_2$
lorsque $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence
et que π induit une bijection $\bar{\pi}: X/\sim \rightarrow Y$.
- (2) On suppose que X est un espace topologique et on munit Y de la
topologie quotient. Montrez que pour toute application continue $f: X \rightarrow Z$
qui est constante sur les classes de $\sim$ -équivalence, l'application
induite $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ est continue.
- (3) On suppose de plus que Y est le quotient de X par un groupe G
agissant sur X par homéomorphismes. Montrez que $\pi: X \rightarrow Y = X/G$
est ouverte (i.e. l'image de tout ouvert est un ouvert).

Nous avons défini les espaces projectifs $\mathbb{P}(E)$; par ex $E = k^{n+1}$ donne naissance à l'espace projectif standard $\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1})$.
Nous introduisons maintenant les sous-espaces projectifs.

Def Un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ est l'image par $\pi: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$ d'un sous-espace vectoriel F de E (ou plutôt, de $F \setminus \{0\}$).

Un tel SEP est donc l'ensemble $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$ des droites de F .

On a ainsi une bijection entre $\left\{ \text{SEP de dim } m \text{ de } \mathbb{P}(E) \right\}$ et $\left\{ \text{SEV de dim } m+1 \text{ de } E \right\}$.

Prop (1) Soient V, W deux SEP de $\mathbb{P}(E)$. Si $\dim V + \dim W \geq \dim \mathbb{P}(E)$ alors $V \cap W \neq \emptyset$

(2) Deux droites projectives distinctes d'un plan projectif sont concourantes.

(3) Soit $H \subset \mathbb{P}(E)$ un hyperplan projectif et $x \in \mathbb{P}(E)$, $x \notin H$.

Alors toute droite passant par x coupe H en un unique point.

Dém On applique une stratégie très classique lorsqu'on travaille dans un espace projectif: prendre les préimages par π puis faire de l'algèbre linéaire.

(1) Soient F, G les SEV préimages par π , i.e. $V = \mathbb{P}(F)$, $W = \mathbb{P}(G)$.

Notons n, m, p les dimensions de $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F), \mathbb{P}(G)$. L'hypothèse est que $m+p \geq n$. On a donc

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) \quad (\text{« formule de Grassmann »}) \\ &\geq (m+1) + (p+1) - (n+1) = m+p-n+1 \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi $F \cap G$ contient une droite, qui correspond à un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)$.

(2) Faire $n=2$ et $m=p=1$.

(3) Notons $H = \mathbb{P}(F)$, et soit $D = \mathbb{P}(G)$ une droite passant par x .

On a donc $\dim E = n+1$, $\dim F = n$ et $\dim G = 2$

Comme $x \notin H$ on a $D \not\subset H$ donc $G \not\subset F$, d'où $F+G = E$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) \\ &= n+2 - (n+1) = 1\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $H \cap D = \mathbb{P}(F \cap G)$ est un point $\square$

Remarque la bijection $\{\text{SEV de } E\} \leftrightarrow \{\text{SEP de } \mathbb{P}(E)\}$

$$F \mapsto \mathbb{P}(F)$$

$$\text{Vect}(\pi^{-1}(x), x \in P) \hookrightarrow P$$

préserve les inclusions : $F \subset G \Leftrightarrow \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(G)$. En particulier on voit ainsi que si $x \in \mathbb{P}(E)$ est fixé, l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}(E)$ passant par x est un espace projectif de dimension $\dim(E)-1$.

En effet si $D \subset E$ désigne la droite vectorielle correspondante à x , on a des bijections:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{droites projectives} \\ \text{passant par } x \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{2-plans vectoriels} \\ F \subset E \text{ contenant } D \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{droites vectorielles} \\ F/D \subset E/D \end{array} \right\} = \mathbb{P}(E/D).$$

Plus généralement l'ensemble des SEP de $\mathbb{P}(E)$ contenant un SEP fixé $\mathbb{P}(F)$ est (en bijection naturelle avec) l'espace projectif $\mathbb{P}(E/F)$.