

8. Dualité projective

La dualité en algèbre linéaire aura une traduction en géométrie projective.

Rappelons - en les grandes lignes pour des k -EV de dim. finie (hyp. essentielle!) :

- ▶ $E^* = \mathcal{L}(E, k) = \text{Hom}(E, k)$ l'espace des formes linéaires, est de même dimension que E donc lui est isomorphe mais non canoniquement (il faut choisir une base pour exhiber un isomorphisme)
- ▶ (bidualité) le morphisme $ev: E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme
 $x \mapsto (ev_x: \varphi \mapsto \varphi(x))$
- ▶ à toute appl. linéaire $f: E \rightarrow F$ est associée une transposée notée $f^*: F^* \rightarrow E^*$ (autres notations rencontrées : ${}^t f$ ou f^t). De plus :

$$f: E \rightarrow F \text{ injective (resp surjective)} \iff f^*: F^* \rightarrow E^* \text{ surjective (resp injective)}$$

- ▶ à tout SEV $F \subset E$, resp $G \subset E^*$, est associé son dual-orthogonal

$$F^\perp = \{\varphi \in E^*, \varphi|_F = 0\} = \ker i^*$$

$$G^\circ = \{x \in E, ev_x|_{F^*} = 0\} = \{x \in E, \forall \varphi \in F^*, \varphi(x) = 0\} = \ker j^*$$

[on a deux notations différentes $(-)^{\perp}$ et $(-)^{\circ}$ mais par bidualité ce ne sont qu'une seule et même notion. On notera $F' = F^\perp$ et $G' = G^\circ$ comme [Audin].]

De plus, si $n = \dim E$, $p = \dim F$ alors $\dim F^\perp = n - p$ [idem pour G°]

La traduction projective est que dans un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dim n ,

la dualité associe à tout sous-espace projectif $V = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$ de dim p

un sous-espace projectif $V' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(F') \subset \mathbb{P}(E^*)$ de dimension $n - p - 1$.

↑
(vérifiez !)

Dans la suite nous allons nous cantonner à un plan projectif $\mathbb{P}(E)$,

donc la dualité associe des points à des droites et des droites à des points.

Le tableau suivant résume la situation, avec $\dim E = 3$:

$P(E)$	E	E^*	$P(E^*)$
$a \in P(E)$ point	$a \subset E$ droite vectorielle	$a' \subset E^*$ plan vectoriel	$P(a') = A' \subset P(E^*)$ droite projective
$D = P(d) \subset P(E)$ droite projective	$d \subset E$ plan vectoriel	$d' \subset E^*$ droite vectorielle	$d' \in P(E^*)$ point

Les relations d'incidence dans l'espace projectif, c'est-à-dire les inclusions éventuelles entre des sous-espaces (points appartenant à des droites, droites incluses dans des plans...) sont respectées par la dualité grâce au fait élémentaire suivant : si F, G sont deux SEV de E alors

$$F \subset G \iff F' \supset G'.$$

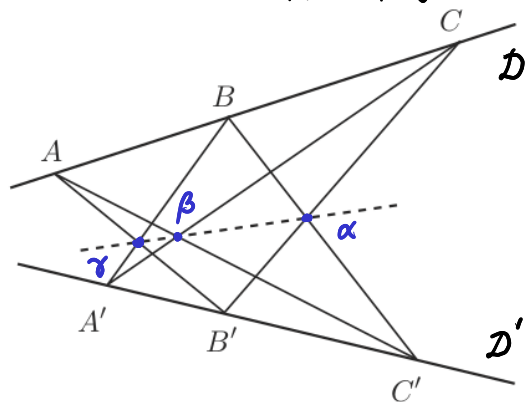
Le dictionnaire de dualisation fournit le tableau suivant où les colonnes expriment des équivalences dans $P = \mathbb{P}(E)$ et $P^* = \mathbb{P}(E^*)$.

	a point de P	$\iff$	A droite de P^*	
	D droite de P		d point de P^*	
	$a \in D$		$A \ni d$	
$a, b, c \in D$	trois points alignés dans P		trois droites concourantes dans P^*	A, B, C Concourantes en d
	droite ab		point $A \cap B$	

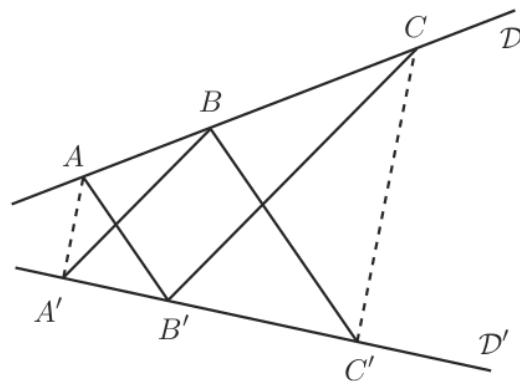
Nous allons illustrer la dualité projective en donnant un analogue projectif du théorème de Pappus, puis son énoncé dual.

Théorème (Pappus) Soient D et D' deux droites et soient A, B et C trois points de D , A', B' et C' trois points de D' . Soient α, β et γ les points d'intersection de $B'C$ et $C'B$, $C'A$ et $A'C$, et $A'B$ et $B'A$ respectivement. Alors α, β et γ sont alignés.

Voici le dessin de Pappus projectif:



Rappelons-nous de Pappus affine:



Dém de Pappus projectif: la droite projective $\alpha\gamma$ peut être choisie comme hyperplan (droite) à l'infini. Dans le plan affine complémentaire (« à distance finie »), les droites (BC') et $(B'C)$ sont parallèles puisque leur point d'intersection est à l'infini. De même (AB') et $(A'B)$ sont parallèles. Le théorème de Pappus affine entraîne que (AC') et $(A'C)$ sont parallèles. Leur point d'intersection β dans le plan projectif est donc à l'infini, c'est-à-dire sur la droite à l'infini $\alpha\gamma$: ainsi α, β, γ sont alignés $\square$

la technique de démonstration utilisée ici s'appelle « envoyer une droite (ici $\alpha\gamma$) à l'infini ».

Soulignons deux avantages du projectif par rapport à l'anne:

- ① les énoncés sont plus simples. Dans le cas de Pappus, il n'y a aucune hypothèse à faire: l'hypothèse de parallélisme sur les droites dans Pappus affine revient à dire qu'elles se coupent à l'infini, or dans un plan projectif deux droites se coupent toujours donc on n'a pas besoin de faire cette hypothèse.
- ② On peut dualiser et obtenir ainsi gratuitement un deuxième énoncé. Mais par l'impatience et l'excitation, nous le faisons tout de suite:

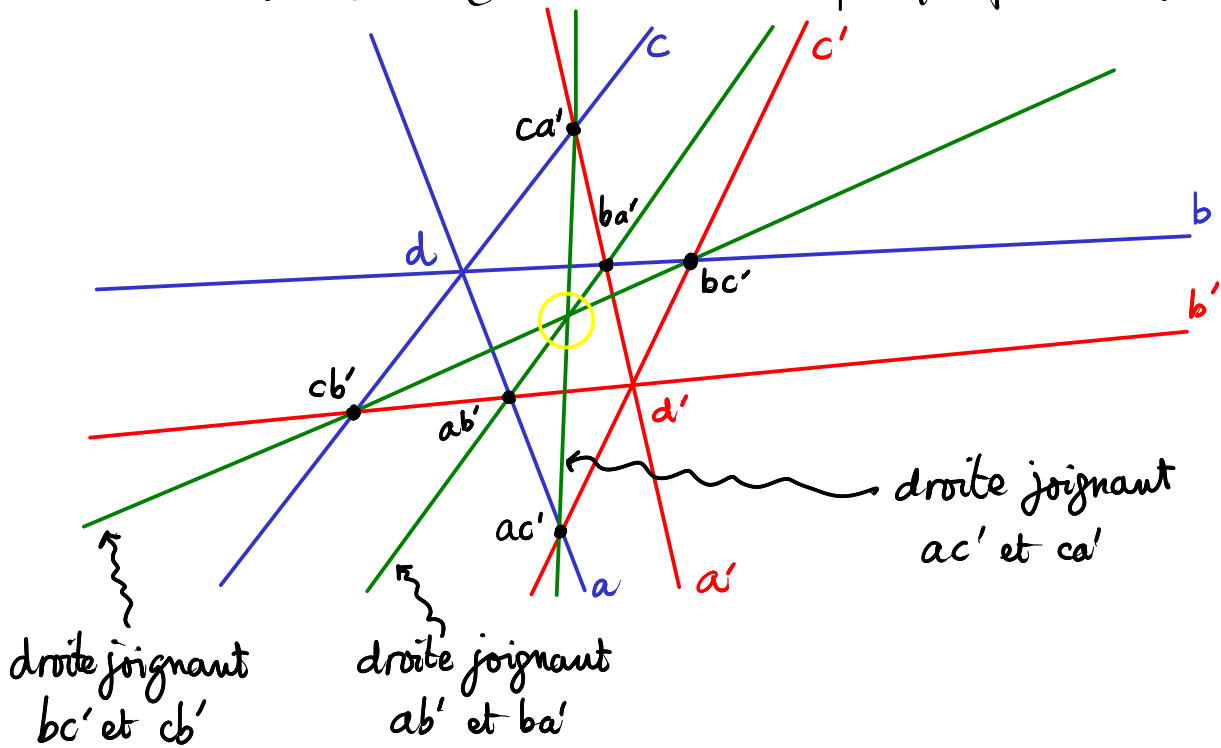
th (Pappus dual): dans un plan projectif soient d, d' deux points et soient a, b, c trois droites passant par d et a', b', c' trois droites passant par d' .

Alors la droite joignant anb' et $bn a'$,

_____ " _____ anc' et cna' ,

_____ " _____ bnc' et cnb' sont concourantes.

Le dessin n'est pas facile à faire si on veut être certain que tous les points d'intersection mentionnés soient dans la feuille de papier. Une astuce est de dessiner a et a' presque parallèles, car on n'a pas à considérer leur intersection (de même b et b' presque parallèles ; c et c').



Dém de Pappus dual : on n'a rien à faire, on part de Pappus projectif initial et on dualise $\square$