

Chap 5

FORMES QUADRATIQUES RÉELLES, GROUPES ORTHOGONAUX RÉELS

1. Le groupe orthogonal ; générateurs

On commence par un rappel :

Th (Loi d'inertie de Sylvester) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 0$.

Il y a $n+1$ classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur E . Pour toute f.q. non dég. q il existe une base dans laquelle la matrice de q est de la forme $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-p})$. Dans une

telle base, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$.

Le couple $(p, n-p)$ est appelé la signature de q .

Dém Voir par exemple Audin, Cor VII.7.5 ou Perrin, Th V.6.6 $\square$

L'algorithme de Gauss permet de calculer la signature. Il est clair que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) q est de signature $(n, 0)$

(2) pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$ et $q(x) = 0$ ssi $x = 0$.

(3) la polarisation $b(x, y) := \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est un produit scalaire.

Dans toute la suite nous nous placerons dans le cas où ces conditions équivalentes sont vérifiées pour étudier le groupe orthogonal de q :

$$O(q) := \{ f \in GL(E) ; q(f(x)) = q(x), \text{ pour tout } x \in E \}$$

(groupe des transformations de E qui préservent q). Si on fixe une base β de E et on note $A = \text{Mat}_{\beta}(q)$, on a $q(x) = {}^t x A x$ donc

$$O(q) \xrightarrow{\sim} \{ M \in GL(E) ; {}^t M A M = A \}.$$

Comme q est de signature $(n, 0)$ il existe une base b.q. $\text{Mat}_{\beta}(q) = I_n$ donc

$$O(q) \xrightarrow{\sim} O_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ M \in GL_n(\mathbb{R}) , {}^t M M = I_n \}.$$

Les éléments de $O(q)$ sont appelés isométries ou transformations orthogonales.

Rem : $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) ; \|Mx\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$
 $= \{M \in GL_n(\mathbb{R}) ; (Mx, My) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}.$

$\therefore$

Nous allons maintenant étudier $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \ker(O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^*)$ en utilisant (comme pour S_n et A_n , ou $GL_n(k)$ et $SL_n(k)$) des familles de générateurs « simples ». Une des propriétés de « simplicité » est d'avoir beaucoup de points fixes — en fait le plus possible.

Dans $O_n(\mathbb{R})$ ceci mène à :

Déf Une réflexion est une isométrie g telle que $\dim \ker(g-1) = n-1$.
 Une réflexion est déterminée par l'hyperplan $H := \ker(g-1)$ ^{ou par la droite $D = H^\perp$} puisque H étant stable, son orthogonal $D = H^\perp$ l'est aussi et l'on a

$$\begin{cases} g|_H = \text{id}_H & (\text{déf de } H) \\ g|_D = -\text{id}_D & (\text{la valeur propre est } \pm 1 \text{ et } +1 \text{ est impossible car } g \neq 1). \end{cases}$$

On note parfois σ_H la réflexion d'hyperplan H ; pour tout choix de vecteur v de norme 1 qui dirige D , on a $\sigma_H(x) = x - 2(x, v)v$.

Dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_D \cup \mathcal{B}_H$ on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_H) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

Les réflexions sont des cas particuliers de symétries ; rappelons qu'une symétrie est une transformation orthogonale s telle que $s \neq 1$ et $s^2 = 1$.
 { d'ordre 2.

Les réflexions sont de $\det -1$ et donc ne sont pas dans $SO_n(\mathbb{R})$.

Dans $SO_n(\mathbb{R})$, les générateurs « simples » que l'on utilisera sont les symétries ayant le plus de points fixes possibles :

Déf un retournement est une symétrie $g \in SO_n(\mathbb{R})$ telle que $\dim \ker(g-1) = n-2$.

Un retournement est déterminé par le plan (=2-plan) $P = \ker(g+1)$ puisque $F = P^\perp = \ker(g-1)$ et $g|_F = \text{id}_F$, $g|_P = -\text{id}_P$.

Dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_P \cup \mathcal{B}_F$ la matrice de g est $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$

Prop $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions.

Dém Si $n=1$ $O_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$ or -1 est une réflexion. Si $n \geq 2$, soit

$g \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$ non nul quelconque.

Si $g(v) = v$, alors $g(v^\perp) = v^\perp$ où $H = v^\perp$ est un hyperplan. Par l'hyp. de récurrence, $g|_H$ est produit de réflexions $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_d$ de H . Celles-ci s'étendent de manière unique en des réflexions $r_i \in O_n(\mathbb{R})$ tq $r_i(v) = v$, et on a $g = r_1 \dots r_d$ car c'est vrai sur H et sur v .

Si $g(v) \neq v$ on peut choisir une réflexion σ telle que $\sigma(v) = gv$: il suffit de prendre la réflexion dont l'axe D est $\text{Vect}(gv - v)$ puisque

$$(gv - v, gv + v) = \|gv\|^2 - \|v\|^2 = 0 \text{ donc } gv + v \in D^\perp$$

$$\begin{cases} \sigma(gv - v) = v - gv \\ \sigma(gv + v) = gv + v \end{cases} \text{ entraîne } \sigma(v) = gv, \text{ comme voulu.}$$

Alors σg fixe v donc est produit de réflexions d'après le 1^{er} cas, cqfd $\square$

Prop Pour tout $n \geq 3$ le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Dém tout élément de $SO_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit de réflexions, en nombre nécessairement pair. Il suffit donc de démontrer qu'un produit de deux réflexions $\sigma_1 \sigma_2$ est égal à un produit de deux retournements $\tau_1 \tau_2$.

Si $n=3$, la forme matricielle montre que $\tau_i := -\sigma_i$ est un retournement, donc l'écriture $\sigma_1 \sigma_2 = (-\sigma_1)(-\sigma_2)$ répond à la question.

Si $n \geq 3$ est quelconque, notons H_i l'hyperplan de points fixes de σ_i .

Alors $H_1 \cap H_2$ est de $\dim \geq n-2$ donc contient un sous-espace V de codimension 3. Dans des bases adaptées à la décomposition $E = V^\perp \oplus V$

les réflexions σ_i ont toutes deux des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \sigma_i|_{V^\perp} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-3} \end{array} \right)$

Ceci nous ramène au cas $n=3$ $\square$

$\uparrow$ $\dim 3$ $\uparrow$ $\dim n-3$

Les propriétés élémentaires des réflexions et retournements fournissent les premiers résultats sur les groupes orthogonaux (comme le calcul de leur centre, voir ci-dessous). Nous les listons maintenant :

Lemme $SO_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur (1) l'ensemble des bases orthonormales directes, (2) l'ensemble des SEV de dim k (k fixé).

Dém on rappelle que le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet
orthonormalisation

de fabriquer des bases orthogonales en partant d'une base quelconque.
orthonormales

(1) provient du fait que la matrice de passage d'une BOND dans une autre est une matrice de $SO_n(\mathbb{R})$.

(2) Si $F, G \subset \mathbb{R}^n$ sont deux SEV de dim k , on peut les munir de BOND $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qu'on complète en des BOND de $\mathbb{R}^n$ (avec une nouvelle utilisation de Gram-Schmidt). On est ramené ainsi à (1). $\square$

Prop (principe de conjugaison) Soit $g \in O_n(\mathbb{R})$.

Si σ_H désigne la réflexion d'hyperplan H , alors $g \sigma_H g^{-1} = \sigma_{g(H)}$.

Si τ_P désigne le retournement de plan P , alors $g \tau_P g^{-1} = \tau_{g(P)}$.

Dém exercice $\square$

Corollaire : les réflexions sont conjuguées dans $O_n(\mathbb{R})$;
les retournements sont conjugués dans $SO_n(\mathbb{R})$.

Dém Découle du principe de conjugaison et de la transitivité sur les hyperplans plans $\square$

Cor les centres sont les suivants :

	$n=2$	$n \geq 3$ impair	$n \geq 4$ pair
$O_n(\mathbb{R})$	$\{\pm 1\}$	$\{\pm 1\}$	$\{\pm 1\}$
$SO_n(\mathbb{R})$	$SO_2(\mathbb{R})$	$\{1\}$	$\{\pm 1\}$

Dém Si $n \geq 2$ on montre que $U = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\} \rightarrow SO_2(\mathbb{R}), z = e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est un iso et le résultat en découle (exercice). Si $n \geq 3$ un $g \in O_n(\mathbb{R})$ qui centralise $SO_n(\mathbb{R})$ commute avec les retournements, donc fixe les plans, donc fixe les droites (car $n \geq 3 \Rightarrow$ une droite peut se mettre dans 2 plans distincts) donc est une homothétie. Comme c'est une isométrie c'est $\pm \text{Id}$ et on conclut $\square$