

2. Compacité et connexité

Prop $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

Dém il est sous-entendu qu'ils sont munis de la topologie induite de celle de l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$, définie par une norme et qui ne dépend pas du choix de norme car $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -EV de dim finie. On montre que les deux sont fermés bornés dans $M_n(\mathbb{R})$:

- fermé: $O_n(\mathbb{R})$ est la préimage du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), M \mapsto M \cdot {}^t M$ et $SO_n(\mathbb{R})$ est $\det^{-1}(\{1\})$ dans $O_n(\mathbb{R})$.
- borné: tout $M \in O_n(\mathbb{R})$ vérifie $\sum_{i,j} m_{ij}^2 = \sum_i \underbrace{\sum_j m_{ij}^2}_{=1} = n$ borné $\square$

Nous verrons plus loin que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$. Nous passons maintenant à la connexité, qui nécessite un rappel:

Th (structure des isométries) Soit $n \geq 1$. Pour toute isométrie $g \in O_n(\mathbb{R})$, il existe une BON $\mathcal{B}$ dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & & 0 \\ & & -1 & \dots & -1 & \\ & & & \dots & & \\ 0 & & & & R_{\theta_1} & \dots & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\theta_i \neq 0 (\pi)$.

On utilisera:

Lm: Soit k un corps, E un k -EV de $\dim n < \infty$, $u \in \mathcal{L}(E)$, χ le polynôme caractéristique de u . Pour tout diviseur $P \mid \chi$ non constant, on a $\ker P(u) \neq 0$.

Dém Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Dans une clôture algébrique $\bar{k}$ de k , il existe une racine λ de P . Écrivons $P(x) = Q(x) \cdot (x - \lambda)$, donc $P(M) = Q(M)(M - \lambda \text{id})$.

Comme λ est valeur propre, on a $\det(M - \lambda \text{id}) = 0$, donc aussi $\det P(M) = 0$.

Ceci montre que l'endomorphisme $P(u)$ n'est pas injectif $\square$

Dém du th: soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un facteur irréductible unitaire du pol. carac.

$\chi = \chi_g$. Comme tout irréductible de $\mathbb{R}[X]$, il vérifie $\deg P \leq 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tel que $P(g)(x) = 0$, qui existe par le lemme.

Si x est vecteur propre, associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, du fait

que g est une isométrie découle $\|x\| = \|g(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ donc $\lambda = \pm 1$.

On pose alors $F = \text{Vect}(x)$ qui est g -stable.

Si x n'est pas vecteur propre, nécessairement $\deg P = 2$ c-à-d $P = x^2 - ax - b$.

Dans ce cas $u^2(x) = au(x) + bx$ donc $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est un plan g -stable.

En itérant ce raisonnement sur l'espace orthogonal $F^\perp$ qui est g -stable

(ou alors en raisonnant par récurrence, ce qui revient au même) on obtient

une décomposition de l'espace $E = \mathbb{R}^n$ en somme directe orthogonale g -stable

$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ avec $\dim F_i \leq 2$. Dans une base orthonormale adaptée à

cette décomposition, les matrices de $g|_{F_i}$ sont $(1), (-1)$ (cas de $\dim 1$) ou

R_θ (cas de $\dim 2$) ce qui conclut $\square$

Corollaire Pour tout $n \geq 2$, $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe (en fait, connexe par arcs).

Dém il suffit de démontrer que toute matrice $M \in SO_n(\mathbb{R})$ peut être reliée à la matrice I_n par un chemin continu. Par le théorème précédent, il existe une matrice orthogonale P telle que $M = P \cdot \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s}) \cdot P^{-1}$.

Comme $\det(M) = 1$, les -1 diagonaux sont en nombre pair; chaque paire forme un bloc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\theta$ avec $\theta = \pi$. Finalement $M = P \cdot \underset{\uparrow \text{des } 1}{\text{diag}(\dots, \dots)} \underset{\uparrow \text{des } R_\theta}{\text{diag}(\dots, \dots)} \cdot P^{-1}$.

En remplaçant les R_{θ_i} par $R_{t\theta_i}$ on décrit un

chemin continu avec $t \in [0, 1]$ entre I_n (pour $t=0$) et M (pour $t=1$) $\square$

Corollaire $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes.

Dém le morphisme $\det: O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$ est surjectif donc $O_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ et $O_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(-1)$ sont non vides. Pour tout $g \in O_n^-(\mathbb{R})$, l'application

$O_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow O_n^-(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme donc le résultat découle du
 $u \mapsto gu$

précédent. $\square$