

3. Simplicité

Il se passe la même chose pour $SO_n(\mathbb{R})$ que pour $SL_n(k)$: le quotient par le centre Z est un groupe simple, avec une petite surprise pour $n=4$.

th le groupe $PSO_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})/Z$ est un groupe simple pour $n=3$ et $n \geq 5$.

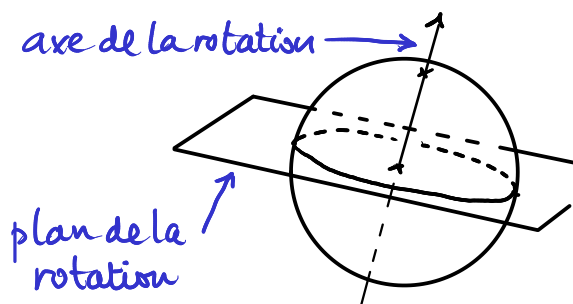
On rappelle que n impair $\Rightarrow$ centre $Z = \{1\}$ et n pair $\Rightarrow Z = \{\pm 1\}$.

Pour $n=4$ il existe un isomorphisme $PSO_4(\mathbb{R}) \simeq SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$. Nous n'en dirons pas plus et nous renvoyons à Perrin, Cours d'Algèbre (Ellipses), chapitre VII pour des détails.

La démonstration classique du théorème de simplicité consiste à traiter le cas $n=3$ puis à ramener le cas général à ce cas (comme pour A_n : on traite le cas de A_5 puis on s'y ramène). Nous nous contenterons ici de la démonstration du cas $n=3$. Nous allons donc montrer:

th Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Dém nous utiliserons le fait que toute rotation g a une matrice semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, si bien que $\text{tr}(g) = 1 + 2\cos \theta$. L'« angle » θ de la rotation n'est pas bien défini car un changement d'orientation le change en son opposé; en revanche $\cos \theta$ est bien défini: c'est $\frac{\text{tr}(g)-1}{2}$.



Maintenant soit $G \neq \{1\}$ sous-groupe distingué. On veut montrer $G = SO_3(\mathbb{R})$.

1) On suppose d'abord G connexe par arcs. Montrons qu'il existe $s \in G$ pour lequel $\cos \theta \leq 0$. Comme $G \neq \{1\}$ il existe $g \in G$ avec $\cos \theta \neq 1$. Quitte à changer g en g^{-1} on peut supposer que $\theta \in]0, \pi]$.

► si $\cos \theta \leq 0$ on pose $s = g$

► sinon $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $N = E(\frac{\pi}{2\theta})$, on a $N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < \pi$.

Alors on pose $s = g^{N+1}$ qui est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Comme G est connexe par arcs il existe un chemin continu γ de id à s .

Alors l'application $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{\text{tr} \gamma(t) - 1}{2}$ est continue avec

$\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \frac{\text{tr} s - 1}{2} \leq 0$. D'après le th. des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle égal à $\pm \frac{\pi}{2}$ donc $R = r^2$ a un angle de π : c'est un retournement.

Comme les retournements sont tous conjugués et engendrent $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, on déduit que $G = \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

2) On suppose maintenant $G \neq \{1\}$ quelconque. On note $G^0 \subset G$ la composante connexe par arcs de l'identité dans G .

Montrons que G_0 est distingué dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$: si $g \in G_0$, $h \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ il existe γ chemin continu de id à g ; l'application $t \mapsto h\gamma(t)h^{-1}$ est continue; son image est connexe par arcs contenant id donc $\text{im}(\varphi) \subset G_0$; en faisant $t=1$ on a $h\gamma(1)h^{-1} = hgh^{-1} \in G_0$.

Si $G_0 \neq \{\text{id}\}$ on a $G_0 = \text{SO}_3(\mathbb{R})$ par ce qui précède, et c'est terminé.

Pour conclure nous allons voir que le cas $G_0 = \{\text{id}\}$ ne peut pas se produire.

Soit toujours $g \in G$, $g \neq 1$. Pour tout $h \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ on peut choisir un chemin continu γ entre id et h dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. Alors $t \mapsto \gamma(t)g\gamma(t)^{-1}$ est un chemin continu dans G entre g et hgh^{-1} , donc hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arcs $\text{CCA}(g)$. Or si $G_0 = \{1\}$ l'application $G \rightarrow G$, $x \mapsto gx$ envoie la $\text{CCA}(1)$ sur la $\text{CCA}(g)$ qui est donc $\{g\}$.

On déduit que $hgh^{-1} = g$ pour tout h , donc g est central dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, impossible puisque le centre de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est trivial. $\square$