

4. Décomposition polaire

Réf :

Ph. Caldero et J. Germoni,
Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries,
tome premier, chapitre VI. Calvage et Mounet, 2017.

Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le résultat suivant est une généralisation matricielle de cette écriture.

Th [Décomposition polaire] L'application $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
$$(O, S) \longmapsto OS$$

Dans cet énoncé, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Commentaires :

(1) Cet énoncé implique que toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $M = OS$. Les matrices O et S ne commutent pas, mais on peut montrer (avec la même démonstration) qu'il existe une décomposition polaire $M = S'O'$ avec $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $O' \in O_n(\mathbb{R})$ (donc $O \neq O'$, $S \neq S'$ en général !)

(2) Analogie complexe: notons $U_n(\mathbb{C})$ resp $H_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unitaires, resp. hermitiennes définies positives. Alors $U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme. Démon. analogue.
$$(U, H) \longmapsto UH$$

Pour la démonstration, nous utiliserons le classique:

th spectral: tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien est diagonalisable en base orthonormée; ses valeurs propres sont des réels ≥ 0 et la décomposition en sous-espaces propres est une somme directe orthogonale.

Dém voir le cours de Licence

Dém du th. de D.P: notons p l'application de l'énoncé; elle est continue.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car elle est symétrique et $({}^tMMx, x) = (Mx, Mx) = \|Mx\|^2 \geq 0$ et > 0 si $x \neq 0$. D'après le th. spectral il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ avec $\lambda_i > 0$.

Posons $S = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$ qui est symétrique définie positive.

On a $S^2 = {}^tMM$ donc en posant $O = MS^{-1}$ on trouve:

${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tMM S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, càd $O \in O_n(\mathbb{R})$. La surjectivité est acquise.

Montrons que μ est injective. Supposons que $M = OS = O'S'$ avec $\begin{cases} O, O' \in O_n(\mathbb{R}) \\ S, S' \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \end{cases}$.
Alors ${}^tMM = S^2 = S'^2$.

Choisissons un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i ; par exemple on peut noter $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ les valeurs propres distinctes (donc $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ sont dans cette liste) et prendre $Q = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange. On a alors:

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} = Q \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \right) = Q(S^2) = Q(S'^2).$$

Dès lors, toute base orthonormale de diagonalisation pour S' est une base de diagonalisation pour S . Dans une telle base l'égalité $S^2 = S'^2$ montre que les valeurs propres $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ et μ'_i de S et S' vérifient $\mu_i^2 = \mu'^2_i$, donc $\mu_i = \mu'_i$ puisque celles-ci sont > 0 . Ainsi $S' = S$ puis $O' = MS'^{-1} = MS^{-1} = O$.

Il ne reste qu'à démontrer que μ^{-1} est continue. Pour cela soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ convergente vers $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Soient $M_k = O_k S_k$ et $M = OS$ les décompositions polaires; nous devons montrer que $O_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} O$ et $S_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} S$.

L'espace topologique $O_n(\mathbb{R})$ étant compact, la suite $(O_k)_{k \geq 0}$ possède une valeur d'adhérence O_∞ i.e. une certaine sous-suite $O_{\varphi(k)}$ converge vers O_∞ .

Alors $S_{\varphi(k)} = M_{\varphi(k)} O_{\varphi(k)}^{-1} \longrightarrow M O_\infty^{-1}$ lorsque $k \rightarrow \infty$. De plus,

$M O_\infty^{-1}$ est symétrique positive car $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$

$M O_\infty^{-1}$ est définie car elle appartient à $GL_n(\mathbb{R})$.

Finalement $S_\infty := M O_\infty^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M = OS = O_\infty S_\infty$. Par unicité de la décomposition polaire, on a $O_\infty = O$ et $S_\infty = S$. En particulier la suite $(O_k)_{k \geq 0}$ a une seule valeur d'adhérence, donc elle converge vers O_∞ , et on en déduit que S_k converge vers S_∞ . On a terminé. $\square$

Nous allons donner deux applications de ce résultat.

Pour la première, on note $\rho(M) = \sup \{ |\lambda| ; \lambda \text{ valeur propre complexe de } M \}$
le rayon spectral d'une matrice carrée réelle ou complexe M .

Cor: pour toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ on a: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^t A A)}$.

Ici $\|\cdot\|_2$ est la norme matricielle subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Dém: Soit la décomposition polaire $A = OS$. On a $\|A\|_2 = \|S\|_2$ car $\|OSx\|_2 = \|Sx\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Notons $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres numérotées de telle manière que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de norme 1, on a

$$\|Sx\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i v_i \right\|_2 \leq \lambda_1 \left\| \sum x_i v_i \right\|_2 = \lambda_1$$

et cette valeur est atteinte lorsque $x = v_1$. Ainsi $\|S\|_2 = \lambda_1 = \rho(S)$. De plus,

$$\rho(S) = |\lambda_1| = \sqrt{|\lambda_1^2|} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^t A A)}. \quad \square$$

Cor le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Dém Soit un sous-groupe compact G tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in G$ et notons $M = OS$ sa décomposition polaire. On a alors $S = O^{-1}M \in G$ donc $S^k \in G$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Or S est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{R}^{+*}$, notons $\lambda_1 = \rho(S)$ la plus grande de celles-ci. Alors S^k est encore symétrique définie positive et $\rho(S^k) = \lambda_1^k$. D'après le corollaire précédent on a $\lambda_1^k = \rho(S^k) = \|S^k\|_2$. Comme G est compact, cette norme reste bornée.

On en déduit que $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 1$. Le même raisonnement appliqué à S^{-1} montre que $\lambda_1^{-1} \leq \dots \leq \lambda_n^{-1} \leq 1$. Finalement $\lambda_i = 1$ pour tout i , donc $S = I_n$ et $M = O \in O_n(\mathbb{R})$. $\square$

Il s'ensuit que pour tout $g \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, le sous-groupe $g O_n(\mathbb{R}) g^{-1}$ est un sous-groupe compact maximal de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut démontrer (c'est plus difficile) que tout sous-groupe compact $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans un conjugué $g O_n(\mathbb{R}) g^{-1}$; voir par exemple R. Mneimné et F. Testard, Introduction

à la théorie des groupes de Lie classiques, §3.6. Hermann, 1986.