Chap 0. **INTRODUCTION**

Pour introduire ce cours je vais parler un peu de « théorie des groupes » et de « géométrie », en évoquant pour chacun de ces deux thèmes un événement important de l'histoire des mathématiques :

- la classification des groupes finis simples,
- le programme d'Erlangen de Felix Klein(*).

Pour respecter la chronologie, je commence par le 2ème thème.

La géométrie et le programme d'Erlangen

La géométrie, c'est la « mesure de la Terre ». Depuis l'écriture des *Eléments* d'Euclide(**) et même avant, la géométrie cherchait à comprendre l'espace dans lequel nous vivons, à travers la formalisation et l'axiomatisation de la géométrie euclidienne en dim 2 et 3.

Son développement jusqu'à la fin du 19e siècle l'a vue se diversifier pour
1) répondre à la question de l'indépendance des axiomes d'Euclide
2) répondre aux besoins d'autres branches des maths, de l'art (perspective à la Renaissance), des marins (sur la sphère), etc.

Apparurent ainsi les géométries euclidienne, sphérique, hyperbolique, projective ...

En 1872, Felix Klein propose une vision unificatrice sur ces géométries à l'aide de la notion de groupe. Il l'écrit dans son allocution d'entrée en poste à l'université d'Erlangen, sous le titre

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen

traduit en français par Padé(***) (Ann. Sci de l'ENS, 1891) par :

Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes.

(★) 1849 - 1925. (★★) vers 300 avant notre ère (★★★) 1863-1953.

La page wikipedia

https://fr.wikipedia.org/wiki/Programme_d'Erlangen

est une bonne source pour en savoir plus.

Felix Klein propose de considérer qu'une géométrie est donnée initialement par un ensemble X (exemple : plan, espace, sphère) muni de l'action d'un groupe G (exemple : $GL_2(\mathbb{R})$ ou $O_2(\mathbb{R})$; $GL_3(\mathbb{R})$; $SO_3(\mathbb{R})$).

Les "objets géométriques" auxquels on s'intéresse sont en correspondance avec les sous-groupes de G :

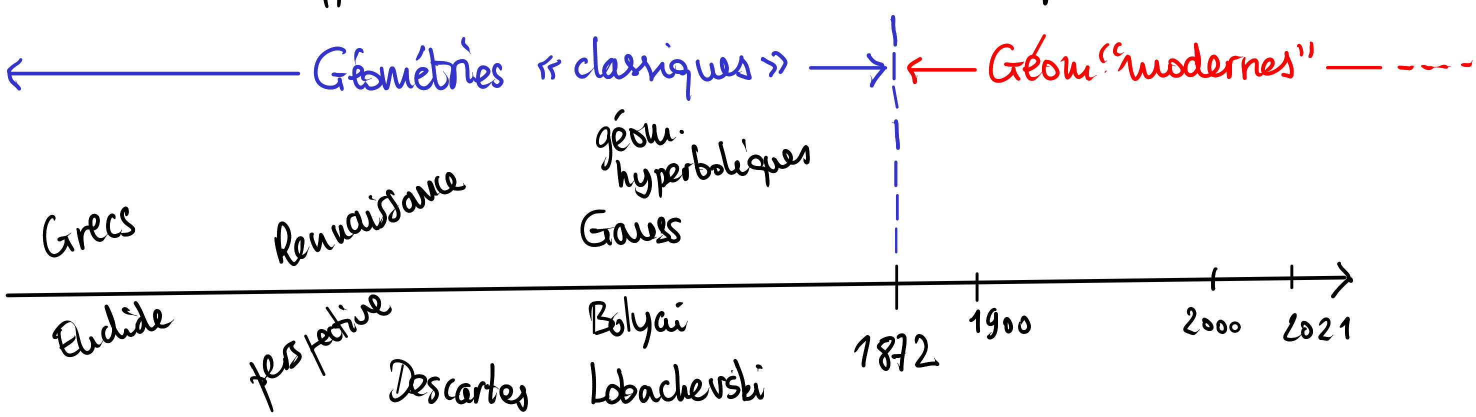
partie $Y \subset X$ $\rightsquigarrow$ sous-groupe $H \subset G$ qui stabilise Y

sous-groupe $H \subset G$ $\rightsquigarrow$ ensemble Y des éléments fixes sous H.

Exemples (source wikipedia) :

Géométrie	Espace	Groupe	Invariants
Affine	Espace affine $\mathbb{R}^n$	$GA(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$ groupe des isomorphismes affines de $\mathbb{R}^n$	Sous-espaces affines
Euclidienne	Espace euclidien $\mathbb{R}^n, g$	$Isom(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$ groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^n$	Sous-espaces affines, sphères
Sphérique	Sphère euclidienne S^n	$O_{n+1}(\mathbb{R})$: groupe orthogonal	Grands cercles
Projective	Espaces projectifs réels $P_n\mathbb{R}$	$PG_n\mathbb{R}$: groupe projectif	Sous-espace projectif
Elliptique	Espace projectif réel $P_n\mathbb{R}$	$PO_{n+1}(\mathbb{R}) = O_{n+1}(\mathbb{R})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: groupe projectif orthogonal	Sous-espaces projectifs

Ce point de vue du programme d'Erlangen englobe les géométries dites « classiques », qui sont celles étudiées dans ce cours (à l'exception de tous les développements modernes de "la" Géométrie depuis lors !).



La classification des groupes finis simples (CGFS)

Nous avons vu que la vision de Klein est rendue possible grâce au concept de groupe dû à Galois. Cette notion formalise l'idée de "symétrie" ou de "transformation". Dans l'esprit de Galois il s'agissait de transformations de structures finies : l'ensemble des racines d'un polynôme. Or il se trouve que le désir de comprendre les groupes finis a été une force motrice et structurante capitale pour toute la théorie. Ce désir a traversé tout le 20ème siècle et a mené à la CGFS — on rappelle qu'un groupe G est simple s'il n'a pas de sous-groupe distingué $H \neq 1, G$ c'est-à-dire qu'on ne peut pas le "casser" en deux morceaux H et G/H pour l'étudier.

La CGFS dit la chose suivante :

> Tout groupe fini simple est de l'un des types suivant :
> - cyclique ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$),
> - alterné (A_n),
> - membre d'une des seize familles (infinies) de groupes de type de Lie,
> - l'un des 26 groupes sporadiques.

Les groupes de type de Lie sont des sous-groupes des groupes linéaires sur des corps finis $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Ils forment des familles : spéciaux linéaires (PSL), orthogonaux (PSO), symplectiques (PSp), etc.

Les groupes sporadiques sont au nombre de 26. Le plus gros d'entre eux, le Monstre, contient un nb d'éléments égal à :

2^46 · 3^20 · 5^9 · 7^6 · 11^2 · 13^3 · 17 · 19 · 23 · 29 · 31 · 41 · 47 · 59 · 71
= 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000
≈ 8 × 10^53.

Et c'est tout, il n'y en a pas d'autre. La page wikipedia

https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_des_groupes_finis_simples

est une bonne source pour en savoir plus.

Comme déjà écrit ci-dessus, l'étude des groupes finis (simples ou non) a fourni à la théorie des groupes un très grand nombres d'idées et de concepts fondamentaux ; c'est une raison pour laquelle c'est très important de la connaître.

Le cours THGG nous donnera une bonne connaissance de base des groupes cycliques, alternés, et de type de Lie (suffisante pour établir leur simplicité). Nous ne parlerons pas des sporadiques, en revanche.