Inversion de la jacobienne des fonctions symétriques élémentaires

On considère des indéterminées $X_1,\dots,X_n$ et on note $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires, définies par l'égalité

$$P(T) := (T-X_1)\dots(T-X_n) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $J = (\partial\sigma_i/\partial X_j)$ est calculé dans les notes *Jacobien des polynômes symétriques élémentaires* de J.-C. Raoult et M. Coste[1] et *Jacobien des fonctions symétriques élémentaires* de V. Beck, J. Malick et G. Peyré[2]. Il vaut :

$$(\star) \qquad \det(J) = (-1)^{n(n-1)/2} V$$

où $V = V_n(X_1,\dots,X_n) = \prod_{i<j}(X_j - X_i)$ est le polynôme de Vandermonde des X_i. Dans cette note, on va un peu plus loin : on calcule l'inverse de la matrice J dans le « plus petit » anneau où cela a un sens, c'est-à-dire l'anneau $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n,1/V]$ (sous-anneau de $\mathbb{Q}(X_1,\dots,X_n)$ composé des fractions d'éléments de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ avec dénominateur une puissance de V) et on en déduit la formule $(\star)$ ci-dessus.

Théorème. *Soit* $A = \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n,1/V]$. *La matrice* J *est inversible dans* $\mathrm{M}_n(A)$, *et on a :*

$$J^{-1} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial \sigma_j}\right) = \left(\frac{(-1)^{j-1}X_i^{n-j}}{P'(X_i)}\right).$$

On note que $P'(X_i) = \prod_{j\neq i}(X_i - X_j)$ est bien inversible dans A.

Corollaire. $\det(J) = (-1)^{n(n-1)/2}V$.

Preuve du théorème. Le polynôme σ_i est la somme des produits $X_{s_1}\dots X_{s_i}$ indicée par les parties $\{s_1,\dots,s_i\}$ à i éléments de $\{1,\dots,n\}$. Pour un entier j fixé, en isolant les parties qui contiennent j on obtient :

$$\sigma_i = X_j\sigma_{i-1}^j + \sigma_i^j$$

où σ_i^j est la fonction symétrique élémentaire de degré i en les variables $X_1,\dots,X_{j-1},X_{j+1},\dots,X_n$. On en déduit l'expression suivante du coefficient général de la matrice J :

$$\partial\sigma_i/\partial X_j = \sigma_{i-1}^j.$$

Par ailleurs, si l'on pose $P(T) = (T-X_j)Q_j(T)$ on obtient l'égalité :

$$Q_j(T) = T^{n-1} - \sigma_1^j T^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}^j.$$

1. Disponible à l'adresse http ://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/jacobsym.pdf.
2. Disponible à l'adresse http ://objagr.gforge.inria.fr/documents/files/jacobien-fonction-symetrique.pdf.

Convenons d'écrire $\sigma_0 = \sigma_0^j = 1$. Puisque $Q_j(X_i) = 0$ si $i \neq j$ et $Q_j(X_j) = P'(X_j)$, on a :

$$(\star\star) \qquad \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} \sigma_{\ell-1}^{j} X_i^{n-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ P'(X_j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant soient Y, Z des vecteurs colonnes tels que $Z = JY$, c'est-à-dire que leurs composantes vérifient $z_j = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{j-1}^{\ell} y_\ell$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} X_i^{n-j} z_j &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} X_i^{n-j} \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{j-1}^{\ell} y_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sigma_{j-1}^{\ell} X_i^{n-j} \right) y_\ell \\ &= P'(X_i) y_i \qquad \text{d'après } (\star\star). \end{aligned}$$

Ceci signifie bien que $J^{-1} = \left(\frac{(-1)^{j-1} X_i^{n-j}}{P'(X_i)} \right)$.

Preuve du corollaire. Nous allons calculer le déterminant de J^{-1}. En préliminaire, comparons le produit $R := \prod_{i=1}^{n} P'(X_i)$ au polynôme de Vandermonde $V = \prod_{i<j}(X_j - X_i)$. Dans R, chaque facteur $X_i - X_j$ apparaît deux fois : dans $P'(X_i)$ et dans $P'(X_j)$, une fois affecté du signe « $+$ » et une fois affecté du signe « $-$ », de sorte que $R = (-1)^{n(n-1)/2} V^2$. Passons au calcul de $\det(J^{-1})$. Par multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes puis par rapport aux lignes, on peut faire sortir les signes $(-1)^{j-1}$ et les dénominateurs $1/P'(X_i)$ et on obtient :

$$\det(J^{-1}) = \det \left(\frac{(-1)^{j-1} X_i^{n-j}}{P'(X_i)} \right) = \frac{(-1)^{1+2+\dots+(n-1)}}{\prod_{i=1}^{n} P'(X_i)} \det \left(X_i^{n-j} \right) = \frac{1}{V^2} \det \left(X_i^{n-j} \right).$$

Maintenant, on va permuter les colonnes selon la permutation σ définie par $\sigma(i) = n + 1 - i$, c'est-à-dire qu'on échange la première et la dernière colonne, la deuxième et l'avant-dernière, etc. Cette permutation est le produit des transpositions $(i, n+1-i)$ pour $i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ donc sa signature est $\epsilon(\sigma) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Or on vérifie facilement, en écrivant la division euclidienne de n par 4, que $2\lfloor n/2 \rfloor$ est congru à $n(n-1)$ modulo 4, donc $\lfloor n/2 \rfloor$ est congru à $n(n-1)/2$ modulo 2, puis $\epsilon(\sigma) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} = (-1)^{n(n-1)/2}$. Finalement on obtient :

$$\det \left(X_i^{n-j} \right) = \begin{vmatrix} X_1^{n-1} & X_1^{n-2} & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ X_n^{n-1} & X_n^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & X_1^{n-2} & X_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & \dots & X_n^{n-2} & X_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V.$$

Il en découle que $\det(J^{-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} V^{-1}$ puis que $\det(J) = (-1)^{n(n-1)/2} V$.