L'exponentielle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas surjective

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On définit son algèbre de Lie (voir [MT]) par

$$\mathfrak{g} = \{\ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } t \in \mathbb{R},\ \exp(tM) \in G\ \}$$

L'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est évidemment $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$. Par ailleurs, à partir de la formule $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{tr}(M))$ on voit que l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{\ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \mathrm{tr}(M) = 0\ \}$$

En utilisant la forme de Jordan d'une matrice on démontre que $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective, voir [Gou]. Nous allons montrer que ce n'est pas un fait général :

Théorème : *L'exponentielle $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas surjective.*

La démonstration nécessite deux petits lemmes intéressants pour eux-mêmes. On utilisera la décomposition DU des matrices inversibles (diagonalisable $\times$ unipotent) que l'on obtient à partir de la décomposition de Dunford $D+N$ en mettant D en facteur. Enfin rappelons que l'indice d'unipotence d'une matrice unipotente U est défini comme étant égal à l'indice de nilpotence de $U - \mathrm{Id}$. L'exponentielle a un bon comportement vis-à-vis de cette décomposition :

Lemme 1 : *L'exponentielle d'une matrice nilpotente N d'indice de nilpotence n est unipotente d'indice d'unipotence n. L'exponentielle envoie la décomposition $D+N$ sur la décomposition DU (mais le D n'est pas le même !).*

Preuve : Posons $U = \exp(N)$. La première assertion découle de :

$$U - \mathrm{Id} = N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots = N\,\underbrace{(\mathrm{Id} + \frac{1}{2}N + \dots)}_{\text{inversible}}$$

Ensuite, si $P = D + N$ avec $DN = ND$ alors $\exp(P) = \exp(D)\exp(N)$. On pose $D' = \exp(D)$ qui est diagonalisable, et $U = \exp(N)$ qui est unipotente. Il est clair que $D'U = UD'$. $\square$

Lemme 2 : *Soit N une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n. Alors, toute matrice commutant avec N est un polynôme en N. En particulier une telle matrice n'a qu'une valeur propre.*

Preuve : Puisque $N^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $N^{n-1}(x) \neq 0$. On vérifie que $\{1, x, N(x), \dots, N^{n-1}(x)\}$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{C}^n$. Il en découle que tout vecteur $y \in \mathbb{C}^n$ s'écrit $y = \sum a_i N^i(x)$ et est donc l'image de x par un polynôme en N, à savoir $P(N) = \sum a_i N^i$.

Soit C une matrice commutant avec N. Par ce qui précède, il existe un polynôme Q tel que $C(x) = Q(N)(x)$. Pour montrer que $C = Q(N)$, il suffit que montrer que $C(y) = Q(N)(y)$ pour tout vecteur y. Or on peut écrire $y = P(N)(x)$ pour un certain polynôme P, donc

$$C(y) = (C \circ P(N))(x) = (P(N) \circ C)(x)$$

(puisque C commute avec N et donc avec tout polynôme en N)

$$\cdots = P(N)(C(x)) = P(N)(Q(N)(x)) = Q(N)(P(N)(x)) = Q(N)(y)$$

On a obtenu $C = Q(N) = q_0 + q_1 N + \cdots + q_d N^d$. La somme des termes de degré ≥ 1 est un endomorphisme nilpotent, donc en se plaçant dans une base de trigonalisation de N on voit que C a pour seule valeur propre q_0. $\square$

Preuve du théorème : Soit $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ unipotente d'indice d'unipotence égal à n. Soit λ une racine n-ème de l'unité, de sorte que $M := \lambda U \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Nous allons montrer que si $\lambda \neq 1$ alors M n'est pas l'exponentielle d'une matrice de trace nulle.

Supposons avoir une matrice de trace nulle P telle que $\exp(P) = M$. Soit la décomposition $P = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente, et $DN = ND$. On a alors $\exp(P) = \exp(D)\exp(N)$ qui est la décomposition « diagonalisable $\times$ unipotent » (lemme 1). Or $M = \lambda U$ donc par unicité de la décomposition, on obtient $\exp(D) = \lambda$ et $\exp(N) = U$.

L'indice de nilpotence de N est égal à l'indice d'unipotence de U (lemme 1) donc n. D'après le lemme 2, la matrice D n'a qu'une valeur propre μ, donc $\mathrm{tr}(D) = n\mu$. Or $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(D) = 0$ car N est de trace nulle. Donc $\mu = 0$ et finalement $D = 0$. En conclusion $\exp(P) = \exp(N)$ ce qui contredit $M = \lambda \exp(N)$. $\square$

Remarques : (1) Le résultat classique qui dit que l'exponentielle réalise un difféomorphisme

$$\{ \text{ matrices nilpotentes } \} \to \{ \text{ matrices unipotentes } \}$$

n'est pas formellement nécessaire pour ce qui précède, mais il apporte un éclairage intéressant sur le lemme 1 et c'est une bonne idée de l'avoir en tête. (Pour la preuve, lire [MT], chap. 3.)

(2) Le lemme 2 est un cas particulier d'un résultat concernant les endomorphismes *cycliques* (endomorphismes dont le polynôme minimal est de degré n) :

« u est cyclique ssi les seuls endomorphismes commutant avec u sont les polynômes en u »

Bibliographie :

Je ne connais pas de référence pour ce développement, tel quel. On a utilisé :

[Gou] Gourdon, Les Maths en tête, Mathématiques pour M', *Ellipses.*

[MT] Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann.*