$\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections

Je propose ici une (re-)lecture de la démonstration qui est dans [Perrin] du fait que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$. Je vous conseille d'accompagner les résultats qui suivent de dessins pour bien les comprendre !

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. Une *transvection* est un endomorphisme $u \in \mathrm{SL}(E)$ tel que $u(t) = t + f(t)a$ où f est une forme linéaire sur E et $a \in \ker(f)$, $a \neq 0$. L'hyperplan $H = \ker(f)$ est déterminé par u de manière unique.

Théorème : *Les transvections engendrent* $\mathrm{SL}(E)$.

Lemme 1 : *Soit $x \in E - \{0\}$ et H_1, H_2 hyperplans distincts tels que $x \notin H_1 \cup H_2$. Alors il existe une transvection u telle que $u(x) = x$ et $u(H_1) = H_2$.*

Preuve : L'idée est de chercher une transvection u qui fixe x et $H_1 \cap H_2$, c'est-à-dire une transvection d'hyperplan $H = H_1 \cap H_2 + kx$. Il suffit alors de trouver des droites vectorielles ky resp. kz, supplémentaires de $H_1 \cap H_2$ dans H_1 resp. H_2, avec $u(y) = z$, pour avoir le résultat. De l'hypothèse sur x il résulte que $H + H_1 = H + H_2 = E$. Soit $z \in H_2 - H$, on peut donc l'écrire

$$z = a + y \qquad \text{avec} \qquad a \in H \text{ et } y \in H_1.$$

Soit f la forme linéaire équation de H telle que $f(y) = 1$: elle existe car $y \notin H$. Soit u la transvection définie par $u(t) = t + f(t)a$. Alors $u(y) = y + a = z$ et c'est gagné. □

Lemme 2 : *Supposons $\dim(E) \geq 2$ et soient $x, y \in E - \{0\}$. Alors il existe u, produit de une ou deux transvections, tel que $u(x) = y$.*

Preuve : Si x et y ne sont pas colinéaires on peut choisir un hyperplan H contenant $y - x$ mais pas x. On pose $a = y - x$ et $u(t) = t + f(t)a$ où f est une équation de H telle que $f(x) = 1$. On a alors $u(x) = x + y - x = y$.

Si x et y ne sont pas colinéaires, on choisit un z qui ne leur est pas colinéaire, et d'après ce qui précède il existe deux transvections u_1, u_2 telles que $u_1(x) = z$ et $u_2(z) = y$ donc $u = u_2 \circ u_1$ convient. (C'est ici qu'on utilise $\dim(E) \geq 2$.) □

Preuve du théorème : On fait une récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Si $n \geq 2$, soit $v \in \mathrm{SL}(E)$. Soit $x \in E - \{0\}$, par le lemme 2 quitte à composer avec une ou deux transvections on peut supposer que $v(x) = x$. Soit ensuite $H \subset E$ un hyperplan tel que $x \notin H$. Alors $x = v(x) \notin v(H)$ donc d'après le lemme 1, quitte à composer avec une autre transvection on peut supposer que $v(H) = H$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $v_{|H}$ nous dit que $v_{|H}$ est un produit de transvections $u_{i,H}$. Chacune de ces transvections s'étend en une unique transvection u_i de E qui fixe x. Comme $v(x) = x$ on obtient que v est le produit des u_i. □

Bibliographie :

[Perrin] Perrin, Cours d'Algèbre, *Ellipses*.