Rotations et homographies

Le thème des exercices de cette feuille est d'étudier le lien entre les groupes $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, qui sont les groupes de transformations naturelles de la sphère S^2 et de la droite projective complexe, et de comparer leurs sous-groupes finis. Les exercices de la feuille sont conçus pour être faits dans l'ordre.

On rappelle que la *droite projective complexe* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites vectorielles du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$. L'application $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui envoie le vecteur (x, y) sur la droite qu'il engendre identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par l'action des homothéties ; on munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la topologie quotient. On note $(x : y) := \pi(x, y)$ que l'on appelle les *coordonnées homogènes* du point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ considéré.

Les *homographies* sont les transformations $h : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la forme $h_A(x : y) = (ax + by : cx + dy)$, pour une certaine matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On peut aussi identifier $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en envoyant le point $(x : y)$ sur $z = x/y$ si $y \neq 0$, et sur $z = \infty$ si $y = 0$. Dans la coordonnée z, l'homographie précédente s'écrit $h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, en appliquant les conventions habituelles $h(\infty) = a/c$ et $h(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$; $h(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Les homographies forment un groupe $\mathscr{H}$ pour la composition, et l'application $A \mapsto h_A$ induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathscr{H}$, où $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est le quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par le sous-groupe des matrices d'homothétie.

Exercice 1 - Projection stéréographique et plongement $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$

On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ identifié à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$, sa sphère unité S^2, le plan équatorial $\mathbb{C}$, et le pôle nord $N = (0, 1)$. La *projection stéréographique* est l'application $\sigma : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie par $\sigma(M) = (NM) \cap \mathbb{C}$ si $M \neq N$, et $\sigma(N) = \infty$.

(1) On note $(z, t) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ les coordonnées d'un point $M \in E$. Montrez que σ est un homéomorphisme et que l'on a $\sigma(z, t) = \frac{z}{1-t}$ et $\sigma^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)$.

(2) Soit I le point de coordonnées $(1, 0) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$. Le plan tangent en un point de S^2 étant orienté par la normale sortante en ce point, on note f_θ la rotation de E d'axe $[ON)$ et d'angle θ, et g_φ la rotation de E d'axe $[OI)$ et d'angle φ. Montrez que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les rotations f_θ et g_φ, pour θ et φ variables.

Indication : si r est une rotation et $Q \in S^2$ un point de son axe, il existe θ et φ tels que $Q = (f_\theta g_\varphi)(N)$.

(3) Une rotation $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ induit une bijection $\widetilde{r} := \sigma \circ r \circ \sigma^{-1}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Calculez $\widetilde{f_\theta}$ et montrez que

$$\widetilde{g}_\varphi(z) = -i\ \frac{z\cos(\frac{\varphi}{2}) + i\sin(\frac{\varphi}{2})}{z\sin(\frac{\varphi}{2}) - i\cos(\frac{\varphi}{2})}\ .$$

Indication : calculer $\widetilde{g}_\varphi(z)$ en écrivant $z = a + ib$ et reconnaître dans le dénominateur de l'expression obtenue l'expression $|z\sin(\frac{\varphi}{2}) - i\cos(\frac{\varphi}{2})|^2$.

(4) Déduisez-en que pour tout $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, la bijection $u(r) := \widetilde{r}$ est une homographie et qu'on définit ainsi un morphisme de groupes injectif $u : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

$\therefore$

On note $\mathbb{D}_n$ le groupe diédral d'ordre $2n$ et $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ les groupes symétriques et alternés. On rappelle que les classes d'isomorphisme de sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ forment la liste

$$\mathscr{L} = \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{D}_n, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5\}.$$

Il découle de l'existence de l'injection $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ que ces groupes sont aussi des sous-groupes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Un théorème classique dû à L. E. Dickson affirme que les sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sont également ceux de la liste $\mathscr{L}$, voir L. E. Dickson, *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, Teubner, 1901. Dans les exercices qui suivent, nous allons apporter des compléments quantitatifs au théorème de Dickson en démontrant que pour chaque groupe G de la liste $\mathscr{L}$, les sous-groupes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ isomorphes à G forment une seule classe de conjugaison, et en particulier sont tous conjugués à un sous-groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ dont nous donnerons un exemple explicite. Cet objectif sera atteint dans l'exercice 5.

Dans toute la suite, on considère $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ comme sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ à l'aide de l'injection $u : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. On notera $\mu_n^* \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines primitives n-èmes de l'unité. On définit une relation d'équivalence dans $\mathbb{C}^*$ par $z \sim z'$ ssi $z' \in \{z, z^{-1}\}$. La classe de z est notée $[z]$, et l'application $[z] \mapsto z + z^{-1}$ définit une injection $\mathbb{C}^*/\!\sim\, \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Exercice 2 - Caractérisation des homographies d'ordre fini

Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, M son image dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ et $h : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'homographie associée, définie par $h(z) = (az+b)/(cz+d)$. Soit $n > 1$ un entier. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est d'ordre n dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$,

(ii) h est conjuguée à $x \mapsto \zeta x$, pour un $[\zeta] \in \mu_n^*/\!\sim$,

(iii) il existe $[\zeta] \in \mu_n^*/\!\sim$ tel que $(\zeta + \zeta^{-1} + 2)\det(A) - \mathrm{tr}(A)^2 = 0$.

(En particulier, l'ensemble $\mu_n^*/\sim$ classifie les classes de conjugaison d'éléments d'ordre n dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.)

Indication : vous pourrez par exemple donner une expression explicite pour la classe $[\zeta_A] = \zeta_A + \zeta_1^{-1}$ où ζ_A est le rapport des valeurs propres de A.

Exercice 3 - Cas des petits ordres

Soit $M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Montrez que :

(1) M est d'ordre 2 si et seulement si $\mathrm{tr}(M) = 0$.

(2) M est d'ordre 3 si et seulement si $\mathrm{tr}(M)^2 = \det(M)$.

(3) M est d'ordre 4 si et seulement si $\mathrm{tr}(M)^2 = 2\det(M)$.

(4) M est d'ordre 6 si et seulement si $\mathrm{tr}(M)^2 = 3\det(M)$.

(Bien que $\det(M)$ et $\mathrm{tr}(M)$ ne soient pas des quantités bien définies, les égalités ci-dessus ne dépendent pas du choix d'un représentant matriciel A pour M, ce qui leur donne un sens.)

Exercice 4 - Renversements de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ vus comme homographies

On rappelle qu'un *renversement* de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est une rotation d'angle π. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

(1) Montrez que $u : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ induit une bijection entre l'ensemble des renversements de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et l'ensemble d'homographies involutives $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$ avec

$$\mathscr{R}_1 = \left\{ h(z) = \frac{z+\sigma}{\overline{\sigma} z - 1},\ \sigma \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{R}_2 = \left\{ h(z) = \frac{\sigma}{z},\ \sigma \in \mathbb{U} \right\}.$$

Indication : si r est un renversement et $Q \in S^2$ un point de son axe, il existe θ et φ tels que $Q = (f_\theta g_\varphi)(N)$. Montrez que $\widetilde{r}$ est de la forme requise, pour un certain σ que vous exprimerez en fonction de θ et φ.

(2) Montrez que les conjugaisons par les homographies $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$ laissent $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ invariants. Montrez que dans chaque classe de $\mathbb{U}$-conjugaison de $\mathscr{R}_1$, il existe une unique homographie de la forme $h(z) = \frac{z+\sigma}{\overline{\sigma} z - 1}$ avec σ réel positif. Montrez que $\mathscr{R}_2$ forme une unique classe de $\mathbb{U}$-conjugaison.

Exercice 5 - Classes de conjugaison des sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$

Si $\{h_i\}_{i\in I}$ est une famille d'homographies définies par $h_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$, on utilise la notation $\langle\, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, i \in I \,\rangle$ pour désigner le sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ qu'elle engendre. On considère les sous-groupes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ suivants :

type $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$: $\mathscr{C}_n := \langle\, \zeta z \,\rangle$, avec $\zeta = e^{2i\pi/n}$.

type $(\mathbb{D}_n)$: $\mathscr{D}_n := \langle\, \zeta z, \frac{1}{z} \,\rangle$, avec $\zeta = e^{2i\pi/n}$.

type $(\mathfrak{A}_4)$: $\mathscr{A}_4 := \langle\, jz, \frac{z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}z-1} \,\rangle$, avec $j = e^{2i\pi/3}$.

type $(\mathfrak{S}_4)$: $\mathscr{S}_4 := \langle\, iz, \frac{z+1}{z-1} \,\rangle$.

type $(\mathfrak{A}_5)$: $\mathscr{A}_5 := \langle\, \delta z, \frac{z+\sigma}{\sigma z-1} \,\rangle$, avec $\delta = e^{2i\pi/5}$ et $\sigma = \sqrt{1 - 2\cos(2\pi/5)}$.

(1) Montrez que ces sous-groupes sont sous-groupes de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, plongé dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ par u.

(2) Montrez que pour chacun des groupes G de la liste $\mathscr{L} = \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{D}_n, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5\}$, tout sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ isomorphe à G est conjugué au sous-groupe du type correspondant indiqué ci-dessus. On ne cherchera pas à vérifier que les groupes $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{D}_n$, $\mathscr{A}_4$, $\mathscr{S}_4$, $\mathscr{A}_5$ sont effectivement isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}_n$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$ respectivement.

Indications : pour la question (2) *utilisez les faits suivants :*

- $\mathbb{D}_n$ *est engendré par deux éléments* r, s *tels que* $r^n = s^2 = (rs)^2 = 1$.
- $\mathfrak{A}_4$ *est engendré par un élément* $\sigma = (123)$ *d'ordre* 3 *et un élément* $\tau = (12)(34)$ *d'ordre 2 dont le produit* $\sigma\tau = (134)$ *est d'ordre 3.*
- $\mathfrak{S}_4$ *est engendré par un élément* $\sigma = (1234)$ *d'ordre* 4 *et un élément* $\tau = (12)$ *d'ordre 2 dont le produit* $\sigma\tau = (134)$ *est d'ordre 3.*
- $\mathfrak{A}_5$ *est engendré par un élément* $\sigma = (12345)$ *d'ordre 5 et un élément* $\tau = (12)(34)$ *d'ordre 2 dont le produit* $\sigma\tau = (135)$ *est d'ordre 3.*

Exercice 6 Expliquez comment calculer les coordonnées complexes des sommets de la projection stéréographique d'un dodécaèdre régulier dont le pôle nord est un sommet. Illustrez votre raisonnement en donnant quelques-uns de ces sommets.