Automorphismes du groupe des quaternions

On note $\mathbb{H}$ le groupe des quaternions. C'est un groupe d'ordre 8, engendré par deux éléments i et j dont on note k le produit, possédant un seul élément central non trivial noté -1, avec une multiplication déterminée par les formules

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ; \quad ij = -ji = k \quad ; \quad ik = -ki = -j \quad ; \quad jk = -kj = i.$$

On peut construire facilement ce groupe comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ ou du groupe symétrique $\mathfrak{S}_8$.

Exercice 1 Pour être bien à l'aise avec $\mathbb{H}$, montrez que :

(1) $\mathbb{H}$ possède un unique élément d'ordre 2, qui est -1.

(2) Le centre de $\mathbb{H}$ est $Z = \{1, -1\}$.

(3) Tout $x \in \mathbb{H} - Z$ est d'ordre 4 et vérifie $x^2 = -1$.

(4) Le quotient $\mathbb{H}/Z$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(5) Tous les sous-groupes de $\mathbb{H}$ sont distingués.

Exercice 2 Dans cet exercice, on constate que pour le groupe $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, les trois structures ensembliste, de groupe, de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, ont essentiellement les mêmes automorphismes.

(1) Soit p un nombre premier et G un groupe abélien tel que pour tout $x \in G$, on a $px = 0$. Montrez qu'il existe une unique structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel sur G compatible avec sa loi de groupe abélien. Déduisez-en que $\mathrm{Aut}(G)$ est le groupe linéaire $\mathrm{GL}(G)$ des automorphismes de G vu comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.

(2) Notons 0 l'élément neutre de $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Pour tout automorphisme $f : V \to V$, on note f' la bijection induite par f sur $V - \{0\}$. Montrez que le morphisme

$$\mathrm{Aut}(V) \to \mathfrak{S}_{V-\{0\}} \simeq \mathfrak{S}_3 \quad , \quad f \mapsto f'$$

est un isomorphisme.

Exercice 3 Soit G un groupe, Z son centre, $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ le morphisme qui à g associe la conjugaison $c_g : x \mapsto gxg^{-1}$. On rappelle que l'image de c est le sous-groupe distingué $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes intérieurs et que c induit un isomorphisme $G/Z \simeq \mathrm{Int}(G)$.

On note $V = \mathbb{H}/Z \simeq \mathrm{Int}(\mathbb{H})$.

(1) Décrivez les automorphismes intérieurs de $\mathbb{H}$.

(2) Montrez que tout automorphisme $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ vaut l'identité sur le centre. Montrez que le morphisme induit $\overline{f} : V \to V$ est l'identité si et seulement si f est intérieur.

(3) Soit σ une permutation de l'ensemble $\{i, j, k\}$. Montrez qu'il existe un unique automorphisme f_σ de $\mathbb{H}$ qui envoie i sur $\sigma(i)$ et j sur $\sigma(j)$. En considérant les permutations $\sigma = (ij)$ et $\tau = (ijk)$ et les automorphismes f_σ et f_τ, montrez que la suite

$$1 \longrightarrow V \xrightarrow{c} \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \xrightarrow{f \mapsto \overline{f}} \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow 1$$

est exacte et scindée, c'est-à-dire que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est produit semi-direct $V \rtimes \mathrm{Aut}(V)$.

(4) Montrez que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ est un produit semi-direct $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{S}_3$ et que c'est le seul avec un 3-Sylow non distingué. Déduisez-en que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Exercice 4 Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Montrez que f est déterminé par $f(i)$ et $f(j)$. Montrez qu'on dispose d'au plus 6 choix pour $f(i)$, puis d'au plus 4 choix pour $f(j)$. Déduisez-en que n'importe quelle façon de faire ces choix définit un automorphisme.

Exercice 5 Voici une présentation un peu plus conceptuelle de l'isomorphisme $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{S}_4$. On considère l'ensemble des parties à trois éléments $x = \{\epsilon_1 i, \epsilon_2 j, \epsilon_3 k\}$ où les signes $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ sont variables ; cet ensemble est de cardinal 8. On considère ensuite l'ensemble X des paires $y = \{x, -x\}$, de cardinal 4.

(1) Montrez qu'un automorphisme de $\mathbb{H}$ permute X.

(2) Montrez que le morphisme $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \to \mathfrak{S}_X$ est injectif.

(3) Déduisez-en que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{S}_4$.