Dualité et sous-réseaux

Soit $i\colon A \to B$ un morphisme injectif entre deux $\mathbb{Z}$-modules libres de même rang fini n. Le conoyau $E = B/A$ est donc un groupe fini, et on a une suite exacte

$$0 \to A \to B \to E \to 0\ .$$

Précisément, la théorie des invariants de similitude dit qu'on peut choisir des bases (distinctes) dans A et B dans lesquelles la matrice de i s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

avec $a_i | a_{i+1}$ pour tout i. On en déduit que $E \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$, en particulier l'ordre de E est le produit des $|a_i|$, c'est-à-dire encore, la valeur absolue du déterminant de i. Si on dualise, au sens du dual $A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$ ([1]), on obtient un morphisme transposé $i^*\colon B^* \to A^*$ qui est encore une injection de $\mathbb{Z}$-modules libres de rang n. La question que je pose est de déterminer le conoyau dans la suite ci-dessous :

$$0 \to B^* \to A^* \to ? \to 0$$

La réponse n'est certainement pas E^*, car $E^* = 0$: vérifiez-le. Le but de cet exercice est de montrer que le conoyau recherché est le dual de Pontryagin $E^\dagger = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ([2]) ([3]).

(1) Démontrez qu'il existe un entier m tel que $mB \subset A$.

(2) Notons F le conoyau de $i^*\colon B^* \to A^*$. Définissez un accouplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times F \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ ,$$

montrez que cet accouplement est non-dégénéré, et déduisez-en le résultat. (*Indications : si* $(e, f) \in E \times F$, *alors* e *est la classe d'un élément* $b \in B$ *et* f *est la classe d'une « forme »* $\varphi\colon A \to \mathbb{Z}$. *Utilisez alors (1) pour définir* $\langle e, f \rangle$.)

---

[1] Le Hom désigne les homomorphismes de groupes abéliens.

[2] Ici encore.

[3] Le dual de Pontryagin d'un groupe topologique commutatif localement compact G est l'ensemble des homomorphismes continus de G dans le groupe $\mathbb{U}$ des complexes de module 1. Or on a une injection $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{U}$ donnée par $r \mapsto e^{2i\pi r}$. Si G est fini discret, tout morphisme $G \to \mathbb{U}$ est continu, et il est clair qu'il a son image dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, de sorte que $\mathrm{Hom}_{cont}(G, \mathbb{U}) = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.